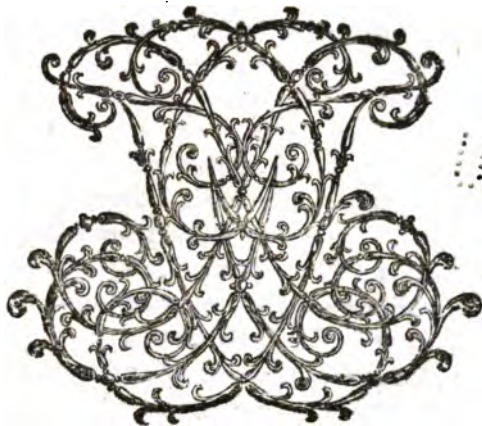
INSTITUZIONI
DI ARITMETICA PRATICA

DEL REVERENDISS. PADRE ABATE

D. GUIDO GRANDI

CAMALDOLESE

PROFESSORE DI MATEMATICA
NELL' UNIVERSITA' DI PISA.

IN FIRENZE NELLA STAMPERIA DI S. A. R.

Per Gio: Gaetano Tartini, e Santi Franchi

CON LICENZA DE' SUPERIORI MDCCXXXX.

INSTITUZIONI
DI
ARITMETICA PRATICA

CAPITOLO PRIMO.

Del modo di numerare, e di rilevare qualunque numero, e come si descrivano.

L modo comunemente tra noi praticato di numerare, procede per la proporzione decupla; di manierachè giunti dall' unità al numero decimo, si replicano altre unità sopra alla decina, che diventa il numero vigesimo; e soggiungendo poscia altre unità, ne proviene il numero trentesimo; e così di mano in mano, come prescrive l' uso ordinario, si accresce altre dieci unità, e si viene al numero quadragesimo, e così pure al cinquantesimo, indi al sessagesimo, poscia al settantesimo, e quindi all' ottantesimo, e susseguentemente al novantesimo, e con l' altra decina di unità si giunge al centesimo, che ha dieci volte compresa la decina. Poscia questi centesimi replicati pure dieci volte, fanno il millesimo, e questo millesimo altre mille volte accresciuto fa il millione, *ec.*

Quindi fu instituito, che nel rappresentare i medesimi numeri si adoperassero questi dieci caratteri, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. de' quali i primi nove significano altrettante unità raccolte per ordine, e l' ultimo, cioè la cifra, che per se sola

nulla ſignificherebbe, ſerve però di riempimento, per denotare in qual poſto ſiano collocate le note ſignificative, che la precedono, augumentandone il valore ſecondo la progreſſione decupla; onde ſcrivendo 10 ſi viene a denotare una decina, e ſcrivendo 20 ſi eſprimono due decine, che diconſi venti; e così 30 ne importa tre decine, che ſono il trenta, e così di mano in mano le altre decine ſimilmente ſi eſprimono; ma quando ſi arriva a dieci decine, ſi deſcrive 100. che è il cento; ed il doppio di ciò, che ſaranno venti decine, ſi eſpone 200 il che è dugento; e così 300 è il trecento; e di mano in mano con altre note procedeſi ad altri centeſimi, li quali ſe ſono dieci, ſi deſcrive 1000, che importa cento decine, cioè il mille; e 2000 importa dugento decine, che ſono due milà; e così l'altre.

Dal che ne avviene, che nelle note numeriche biſogna avvertire il poſto in cui ſono collocate; imperocchè l'ultima nota, che rieſce dirimpetto alla deſtra di chi legge, ſignifica le ſemplici unità, e l' antecedente verſo la ſiniſtra ne raſſegna le decine delle unità, e quella che precede queſta ne importa le centinaia, e l' altra nota antecedente le migliaia; e così di mano in mano qualunque figura anteriore moltiplica per dieci il ſignificato, che averebbe avuto nel poſto ſuſſeguente, come ſi apprenderà nella ſeguente tavola, in cui ho eſpoſto un numero a capriccio di ventotto note, le quali dalla deſtra alla ſiniſtra ſi poſſono dividere con alcune virgole di tre in tre, per diſegnare le centinaia, le decine, e le unità; ed ancora al di ſopra vi ho poſte alcune ſtellette,

lette, che le distinguono di sei in sei, li quali diconsi i millioni, e i millioni de' millioni (che possono dirsi *Billioni*) e li millioni di millioni di millioni (che si chiamano ancora *Trillioni*) ed ancora li millioni de' millioni, de' millioni, de' millioni (che possono dirsi *Quadrillioni*) ed accennasi appresso a ciascuna nota la denominazione, che gli conviene nel posto, in cui si trova.

2 854 021 354 791 256 402 314 574 286

- Migliaia di Quadrillioni.
- Centinaia di Quadrillioni
- Decine di Quadrillioni
- Quadrillioni
- Centinaia di Migliaia di Trillioni
- Decine di Migliaia di Trillioni
- Migliaia di Trillioni
- Centinaia di Trillioni.
- Decine di Trillioni
- Trillioni
- Centinaia di Migliaia di Billioni
- Decine di Migliaia di Billioni
- Migliaia di Billioni
- Centinaia di Billioni
- Decine di Billioni
- Millioni di Millioni (o dicansi Billioni)
- Centinaia di Migliaia di Millioni
- Decine di Migliaia di Millioni
- Migliaia di Millioni
- Centinaia di Millioni
- Decine di Millioni
- Millioni
- Centinaia di Millesimi
- Decine di Millesimi
- Millesimi
- Centesimi
- Decine
- Unità

E così se fosse più lungo il numero, vi sarebbero ancora Quintillioni, Sestillioni, Settillioni, Ottillioni, Novillioni *ec.* crescendosi ciascuno da ogni sei note.

Il suddetto numero dovrebbe però così esprimersi esattamente: *due mila ottocento cinquantaquattro Quadrillioni, ventun mila trecentocinquantaquattro Trillioni, settecento novantun mila dugento cinquantasei Billioni, quattrocento due mila tre-*

trecento quattordici Millioni, cinquecento settantaquattro mila, e dugento ottanta sei; e qualunque altro numero similmente potrassi esprimere; per esempio 4 8 9 *, 6 7 3, 5 1 0 *, 2 4 3, 8 0 5 significa *quattrocento ottantanove Billioni, seicento settantatre mila e cinquecentodieci millioni, dugento quarantatre mila ottocentocinque*; e così qualunque altro facilmente dovrassi intendere, secondo che nell'antecedente Tavola si è accennato il valore delle note poste sopra, o sotto.

Oltre però a queste note Aritmetiche, quà solamente addotte da Gereberto Monaco Floriacense, ottimo Filosofo, e Matematico, che poi fu Arcivescovo Remense in Francia, poscia in Ravenna di Romagna, fattovi elevare dall' Imperatore Ottone III. di cui era stato Maestro, ed indi fu fatto poi Papa nell' anno 999, cioè novecento novantanove, col nome di Silvestro Secondo, che poi morì nel 1003, cioè nell' anno terzo dopo il millesimo, vi sono le note Romane, che prima solamente si adoperavano, ed ora in molti luoghi pure si ammettono le quali sono queste lettere I, V, X, L, C, D, M. La prima espone l' unità, e duplicandola II. fa due, triplicandola fa III. cioè tre. La seconda esprime il cinque, e postogli avanti l' unità, cioè IV. assegna quattro, ma se gli si aggiunge dopo l' unità VI. espone sei, se due unità VII. fa sette, e se tre unità VIII. fa otto. La terza lettera esprime dieci, e con l' unità precedente IX. espone nove, con le unità poi aggiuntevi XI. XII. XIII. rappresenta undici, dodici, e tredici, ed aggiuntovi la nota del quattro, e del cinque, e dell' altre susseguen-

guenti, cioè XIV. XV. XVI. XVII. XVIII. XIX. espone quattordici, quindici, sedici, diecisette, diciotto, diciannove; e duplicando, o triplicando l'istessa, cioè XX. XXX. rappresenta il venti ed il trenta, alle quali addotte le note degli altri primi numeri, come XXII. XXIV. XXXV. *ec.* si espongono ventidue, ventiquattro, trentacinque, e così gli altri. La quarta lettera significa il cinquanta, e con la terza avanti, cioè XL. fa il quaranta; e con esse dopo, come LX. LXX. LXXX. si esprime il sessanta, il settanta, e l'ottanta; alle quali aggiunte le altre note de' primi numeri, come LXV. LXXII. LXXXIV. LXXXIX. ed altre simili, si ha il sessantacinque, il settantadue, l'ottantaquattro, l'ottantanove *ec.*

La quinta lettera C. significa cento, e postavi avanti la terza, cioè XC. espone novanta, onde XCIII. dice novantatre, XCIX. importa novantanove, ed aggiunte le altre note al C, come CV. CX. CXXIV. *ec.* esprimesi cento cinque, cento dieci; cento ventiquattro *ec.* e duplicando l'istessa C, o triplicandola, cioè CC. CCC. rappresenta il dugento ed il trecento, alle quali parimente si aggiungono l'altre note, come CCXXV. CCCLIII. CCCLXIX. espongono dugento venticinque, trecento cinquantatre, trecento sessantanove *ec.*

La sesta lettera D. esprime cinquecento, onde postavi avanti la C, cioè CD. rappresenta il quattrocento, ed aggiuntavi dopo, come DC. DCC. DCCC, si espone il seicento, il settecento, e l'ottocento; ed aggiunte a queste medesime altre note, DCXII. DCCLIV. DCCCXLVII. similmente espongono il seicento dodici, il settecento

cinquantaquattro, l' ottocento quarantasette *ec.* Finalmente la settima lettera M rappresenta il mille, e postovi avanti il C, cioè CM. propone il novecento, e postagli dopo MC. MCC. MCCC. MCD. MD. MDC. MDCC. *ec.* significasi il mille cento, mille dugento, mille trecento, mille quattro cento, mille cinque cento, mille sei cento, mille sette cento *ec.* ed aggiuntevi ancora altre note, come MDCXIV. MDCCCLXV. *ec.* si averà il mille seicento quattordici, il mille ottocento sessantacinque *ec.* e replicando l' istessa M, cioè MM. ovvero MMM. *ec.* si espone due mila, tre mila *ec.*

Ma noi parleremo di quell' altre note avanti proposte, che più facilmente s' intendono, con minor calcolo, rapportando maggiori numeri; nè ritrovandosi come con le note Romane si esprimessero i Millioni, e Billioni, e Trillioni *ec.*

CAPITOLO II.

Del sommare insieme più numeri della medesima specie.

SI scrivano per ordine i numeri da aggiungersi insieme, facendo corrispondere le unità alle unità, le decine alle decine, le centinaia alle centinaia, e così di mano in mano: poscia tirata sotto una linea, si compongano insieme le unità da aggiungersi, le quali se sono più di nove, come che tale somma dovrebbe con due, o più note esprimersi, solamente l' ultima ci si deve sottoscrivere, riserbandosi l' altre da aggiungersi al luogo delle decine; e queste parimente congiungendosi insieme, del numero che ne risulta, se ne sot-

sottoscrive pure l' ultima nota nel luogo delle decine, riserbando l' altre di aggiungersi alle centinaia; e così di mano in mano andando verso la sinistra, fin che non vi sia altro da aggiungersi, tutto il resultante si scriverà al suo luogo, come s' intenderà meglio nel seguente esempio.

Siano da aggiungersi insieme li quattro numeri A, B, C, D, e scrivendoli ordinatamente ciascuno sotto l' altro; tiratagli sotto la linea retta, si pongano insieme le unità 2 e 4, che fa 6, lo zero o non aggiunge nulla, ma la nota superiore 6 con gli altri compone 12, però si scriva sotto il 2, e si trasporti alla parte delle decine l' unità, che vi era avanti, e prese le tre note di decina, l' uno che si porta, col 9 fa 10, e col 2 diventa 12, col 5 riesce 17, e col 2 si fa 19, però sotto scrivasi 9; ed alle centinaia ammessa l' antecedente unità, con 8 fa 9, col 7 diventa 16, col 2 fa 18, e con l' 8 fa 26, però scrivasi sotto il 6, ed il 2 si trasporti alle migliaia, che con 1 farà 3, con 3 diventerà 6, con 4 riesce 10, e con 5 si fa 15, onde si scriva pure sotto il 5, e portata l' unità a' numeri precedenti, con 5 fa 6, con 6 fa 12, con 8 diventa 20, e con 4 si fa 24, perciò si scriva di sotto il 4, ed agli antecedenti numeri aggiunto il 2, che con 5 fa 7, con 7 fa 14, e con 3 diventa 17, scritto sotto il 7, e trasportata di là l' unità, con 1 e 2 farà 4, da scriversegli sotto; onde la somma di quei numeri A, B, C, D, è uguale a ciò che ci esprime il numero E, che importa *quattro mil-*

A	2345826
B	784250
C	1563724
D	51892
E	4745692

lioni, settecento quarantacinque mila, seicento novantadue. Eccone altri minori esempj.

245	456	7952	82052
1382	3240	345	64721
2748	532	28	8094
4375	4228	8325	154867

Per riprova d' aver bene operato, si suole alle volte rifare l' operazione a rovescio, cioè, siccome prima si cominciò a sommare dalle note inferiori ascendendo alle superiori, così un altra volta può cominciarsi dalle superiori discendendo alle inferiori, per vedere se ne ritorna il medesimo numero nella somma, come prima si era trovato.

Oltre a ciò può farsi la prova del nove in questa maniera. Si mettano insieme le note de' numeri proposti, sommandogli con qualsivoglia ordine, come se fussero semplici unità, e rigettando sempre il nove qualunque volta s' incontri, ritengasi solamente il conto di quello ne avanza; poscia si faccia il simile nella somma, in cui se da i 9, non avanzasse lo stesso numero, sarebbe segno di aver fatto male il calcolo con qualche errore commessovi, ma se si trova il medesimo avanzo di numero, la somma si crederà stare benissimo, se pure non vi si fusse per sorte errato di nove. Così nel primo precedente esempio, rigettando il nove da' numeri A, B, C, D, ne rimane una sola unità, e l' istessa avanza nella somma E, come è chiaro; imperocchè nel numero A, che è 2345826, il 4 e 5 fa 9, il 6 e 3 fa 9, l' 8 col 2 fa 10, e con l' altro 2 fa 12, che sono

3 ol-

3 oltre il 9; nel numero B, che è 784250, riesce 8, essendo gli altri 7 e 2 uguali a 9, ed ancora 4 e 5 uguale a 9; nel numero C, che è 1563724, rimane solo 1, essendo gli altri 5 e 4 uguali a 9, 6 e 3 uguali a 9, 7 e 2 uguali a 9; nel numero D, che è 51892 levato il 9, ed il 18, rimane 5 e 2, che fanno 7; dunque del primo numero essendo rimasto il 3, nel secondo 8, che con quello fa 11, nel terzo l' unità, che con quelli fa 12, e nel quarto 7, che con li precedenti fa 19, è chiaro, che levati i due 9 rimane 1, ed ancora nella somma E, che è 4745692, levato il 9, il 7 e 2 il che pure è 9, il 4 e 5 che ancora fa 9, rimane il 6 con l' altro 4 che fa 10, onde ci rimane pure l' unità oltre i novesimi.

L' istesso si mostrerà negl' altri esempj, come ancora in quest' altro calcolo, in cui ne' due numeri precedenti levato il 3 e 6 che fa 9, rimane 4, e con 8 farà 12, cioè 3 sopra il 9, e col 2 farà 5; ed ancora nella sua somma 6 e 6 fa 12, che sono 3 sopra il 9, e questi 3 con quelle due unità fa pur 5, onde sarà ben ridotta da que' due numeri cotesta somma; e così pure si farà in altri casi, e molto piacerà questa specie del 9, di cui se ne mostreranno qui altre proprietà molto favorevoli, che si vedranno in altri Capitoli.

```
 346
 820
----
1166
```

CAPITOLO III.

Del sommare i numeri di specie diversa.

ALle volte si devono aggiungere numeri appartenenti a varie specie di cose, come sarebb-

rebbero lire, soldi, e danari; o pure giorni, ore, e minuti, o ancora di una circolare periferia i gradi, i minuti primi, i minuti secondi, i minuti terzi *ec.* e similmente in altri casi composti di varie parti. Allora conviene disporre i numeri in maniera, che si corrispondano le specie simili una sotto l'altra, e cominciando a sommare quelli di minor valore, si vede se nella somma si contiene la specie superiore, la quale si ritiene, sottoscrivendo solamente l'avanzo, e riportando ciò che si è ritenuto, per congiungerlo a' numeri della specie precedente, li quali altresì posti insieme, se ne comprende qualche numero dell'altra specie superiore da riportarsi ad essa, scrivendone sotto questa il residuo; e così pure si fa nell' altre specie se vi sono antecedentemente, compreso poi il resto nella maggiore specie di tutte, come si spiegherà meglio ne' seguenti esempj.

siano	*Lire.*	*Soldi.*	*Danari.*
	8.	10.	4
	2.	6.	8
	4.	10.	4
somma lire	15.	7.	4

Cominciando dall'infima specie, che sono i danari, si dice 4 e 8 fanno 12, li quali dodici danari fanno un soldo, e rimane 4 da sottoscriversi; indi aggiunto quel soldo alli 6 fanno 7, e li 10 duplicati ne fanno 20, che appartengono ad una lira, però gli si sottoscrive 7, e computata questa lira con le altre 4, 2, e 8 diventano lire 15 onde la somma è lire 15. 7. 4 e se vi fossero

stati

ſtati ancora diviſi li ſcudi, che hanno lire 7 l' uno in Toſcana, biſognava dire ſcudi 2, lire 1, ſoldi 7, e danari 4, perchè il primo numero ſarebbe pure ſtato ſcritto in quell' altra maniera Scudi 1. lire 1. 10. 4 in vece di lire 8. 10. 4

Similmente ſe vi foſſero varj numeri di giorni, d'ore, e di minuti, ſi potranno ſimilmente comprendere nell' iſteſſa maniera.

	Giorni.	*Ore.*	*Minuti.*
	8.	17.	48
	13.	20.	16
	21.	19.	30
	5.	18.	38
ſomma	50.	4.	12

Congiungendo i minuti 38, 30, 16, e 48 ne rieſce 132, in cui 120 importa due volte il ſeſſanta, cioè 2 ore, ciaſcuna delle quali ha ſeſſanta minuti, però ſi ſcriva ſotto il rimanente 12; ed aggiunte ore 2 alle 18, 19, 20, e 17 ne rieſcono 76, in cui 72 importano 3 volte le 24 ore, e però ſottoſcrittovi il rimanente 4, ſi traſportino 3 giorni (ciaſcuno de' quali ha le 24. ore) agli altri 5, 21, 13, e 8, che ne rieſcono giorni 50; e ſe vi ſi doveſſero ancora diſtinguere i meſi di 30 giorni l' uno, ſarebbero un meſe e giorni 20, con 4 ore, e 12 minuti.

Similmente eſſendovi alcuni peſi, libbre, ed once d' olio, o di farina *ec.* ſe ne ricaverà la ſomma in ſimigliante maniera. Per eſempio ſiano

Peſi

	Pesi.	*Libbre.*	*Once.*
	7.	14.	6
	12.	18.	10
	5.	16.	9
la somma è	26.	0.	1

Computate le once 9, 10, e 6 sono 25, in cui due volte sono le 12, che compongono la libbra, però levate le 24, si scrive sotto solamente 1, e si portano le 2 libbre all' altre 16, 18, e 14, che ne fanno 50, ma 25 libbre facendo un peso, dunque ne riescono 2 pesi senz' altra libbra, onde vi si scrive sotto il zero, e questi 2 pesi composti con 5, 12, e 7 riescono 26.

Dovendosi ancora computare i gradi della curva circolare, con i suoi minuti primi, e secondi: siano

	Gradi.	*Minuti* I.	*Minuti* II
	25.	32.	46
	60.	50.	27
	13.	41.	32
la somma sarà	100.	4.	45

Imperocchè li minuti secondi 32, 27, e 46 sono 105, da cui levato il 60, che è un minuto primo, ne rimane da scriversi sotto 45, e computato quel minuto primo con gli altri 41, 50, e 32 se ne fanno 124, di cui il 120 è due volte 60 minuti primi, che ne importano 2 gradi, onde scrittovi sotto il 4 si computano quelli due gradi con gli altri 13, 60, e 25, che riescono 100.

Chi volesse provare ancora l' esattezza di questi sommati, potrebbero sommarsi li numeri di

qua-

qualunque ſpecie con un altro ordine cominciando da' ſuperiori, e diſcendendo agl' inferiori, ſiccome prima abbiamo ciò fatto cominciando dagl' inferiori, ed alzandoſi a' ſuperiori, e vedere ſe ne rieſce l' iſteſſa ſomma. Volendo poi col 9 provare ſe vi ſia lo ſteſſo eceſſo ne' numeri da ſommarſi, come è nella loro ſomma, non baſterà far ciò in qualunque numero; come nel capitolo precedente ſi è inſegnato, circa alla ſomma de' numeri della medeſima ſpecie, ma conviene moltiplicare quelli della prima ſpecie, e della ſeconda, come ne comporta la terza.

Per eſempio, ove ſi adduſſero lire, ſoldi, e danari, come che la lira è di 20 ſoldi, ed il ſoldo di danari 12, eſſendo ſopra il 9 quello 2, e queſto 3 (perchè il 20 ſupera il 18 con 2, ed il 12 ſupera il 9 di 3; anzi baſta oſſervare le ſemplici note de' numeri, che moſtrano appunto il loro eceſſo ſopra il noveſimo, eſſendo 1 con 2 uguale a 3, perciò tanto il 12, quanto il 21 ſupera il 9 ſolo, o duplicato di 3, e così ancora 42, o 24 ſupera il 9 di 6 *ec.*) perciò moltiplicando il 2 col 3 fa 6, onde li numeri delle lire 4, 2, e 8 eſſendo 14, cioè 5 ſopra il 9, biſogna moltiplicare eſſo 5 nel 6, che fa 30, cioè ſolamente 3 ſopra il 9 (ſuperando 30 il 27 di 3) e li numeri de' ſoldi 10, 6, e 10, che ſuperano il 9 di 8, deve moltiplicarſi in 3, che ſarebbe 24, cioè 6 ſopra il 9; indi ne' danari 4, 8, e 4 fanno 16, cioè 7 ſopra il 9, onde avendoſi dalle lire l' eceſſo del 9 uguale a 3, da i ſoldi uguale a 6 (che con 3 il 6 fa 9) rimane il ſolo eceſſo 7. Ma ancora nel ſommato le lire 15 fanno 6, che moltiplicate per 6 fareb-

rebbero 36 uguale al quadruplo 9, e ne' soldi il 7 moltiplicato per 3 fa 21, che pure è 3, che sommato col numero de' danari 4, fa pur la somma di 7, come si trovò ne' numeri da sommarsi.

Quanto a' giorni, ore, e minuti, essendo il giorno di 24 ore, e l' ora di 60 minuti, essendo tanto questo, che quello 6 sopra il 9, e moltiplicato il 6 per 6 facendo 36, che contiene quattro volte appunto il 9; perciò non occorre cercare il 9 nel giorno, ma basta osservarlo nell' ore, ed il suo eccesso moltiplicato per 6 si unisca a' numeri de' minuti, come nell' esempio addotto. Dall' ore 18, 19, 20, 17 ne risultano 2 oltre il 9, e moltiplicato 2 per 6 diventa 12, che è 3 sopra il 9; indi da minuti 38, 30, 16, e 48 levato il 9 rimangono 6, ed aggiuntovi il 3 diventa pur 9, onde niuno eccesso vi rimane; Così ancora nel sommato le ore 4 moltiplicate per 6 fanno 24, che sono pure 6 sopra il 9, ed il 12 de' minuti, essendo 3 sopra 9, con l' altro 6 rimane pur 9 senza veruno eccesso.

Circa i pesi, libbre, ed once, essendo il peso di 25 libbre, che è un 7 sopra il 9, e la libbra di 12 once, che importano 3 oltre il 9, sarà pure 7 via 3 uguale a 21, che ancora è 3 sopra il 9. perciò gli eccessi e del peso, e delle libbre sopra li 9, si moltiplicheranno per 3, indi si aggiungeranno a' numeri dell' once, come nell' addotto esempio. I pesi 5, 12, e 7 importano 6 oltre il 9, e moltiplicato 6 per 3 fa 18, che è appunto 9 senza veruno eccesso; le libbre poi 16, 18, e 14 ne importano 3 sopra il 9, che moltiplicato per 3 fa parimente 9; sicchè basta osservare l' once 9, 10, e 6, che importano 7 oltre il 9. Ma nel sommato

di

di esse i pesi 26 importano 8 sopra il 9, che moltiplicato per 3 fa 24, cioè 6 eccesso di 9, che con l' oncia 1 importa ancor essa il 7, e però è ben disposta.

Quanto a' gradi, e minuti primi, e minuti secondi, essendo ogni grado di 60 minuti primi, e qualunque minuto primo di 60 minuti secondi, perciò il grado non deve compararsi co' 9, perchè il suo eccesso anderebbe moltiplicato in 6 via 6, che fa 36 uguale alli 9, ma solamente l'eccesso de' minuti primi 41, 50, e 32, che è 6 sopra il 9, moltiplicatosi pure per 6 fa il 36 uguale alli 9; ma ne' minuti secondi 32, 27, e 46 rimane pure il 6 sopra il 9. Ed ancora nel sommato de' minuti primi 4 moltiplicati per 6 fanno 24, che pure sono 6 sopra il 9, e ne' minuti secondi 45 non vi è altro eccesso sopra il 9; onde è il medesimo eccesso ne' numeri da sommarsi, e nel sommato di essi. Onde nessuna delle addotte somme si trova mal fatta.

CAPITOLO IV.

Del modo di sottrarre i numeri della medesima specie, o di specie diverse; e di alcune proprietà de' numeri verso il 9.

SI scriva il numero maggiore, da cui si deve fare la sottrazione sopra al minore, che deve sottrarsi; di manierachè, corrispondendo le unità alle unità, le decine alle decine, li centesimi alli centesimi, e così di mano in mano gli altri, cominciando poscia dall' ultimo, si sottraggano quelle del numero inferiore da quelle del superiore, sotto-

scri-

scrivendo l' avanzo ne' luoghi corrispondenti; ma perchè può darsi il caso, che qualche numero inferiore si trovi maggiore di quello del superiore; da cui non potrebbe sottrarsi, conviene allora prestare una decina antecedente al numero superiore; acciocchè basti all' effetto desiderato, e fatta la sottrazione dell' inferiore, si scriverà l' avanzo al di sotto. Quindi la precedente nota del numero superiore rimarrà diminuita dell' unità aggiunta alla sua seguente nota, come si vedrà nell' esempio seguente.

A	9 2 3 4 2
B	5 1 8 3 1
C	4 0 5 1 1

Si debba sottrarre il numero B dal maggiore A. Essendo scritti per ordine questo sopra quello, si levi l' ultima nota 1 dalla superiore 2, e resterà pure 1 da scriversi sotto al suo luogo; indi sottratto il 3 dal 4 resta pure un altra unità da sosccrivervi; perchè poi 8 non può levarsi da 3, gli si aggiunge una decina, e si fa 13, da cui tolto 8 rimane da sottoscriversi 5; poscia essendo levata l' unità dal superiore numero 2, rimane uno, da cui volendo cavare l' altro inferior numero 1 nulla ne rimane, perciò sottoscrivesi il zero; indi detratto 5 da 9 rimane da sottoscriversi 4, e così è compiuta la sottrazione C.

D	3 4 2 5
E	8 3 7
F	2 5 8 8

Un altro esempio sia questo, in cui debbasi dal numero D ritrarne il numero E. In questo non potendo sottrarsi, ne 7 da 5, ne 3 da 2, ne 8 da 4, bisogna fare in quest' altro modo; 7 da 15 ne resta da sottoscriversi 8, e perchè il 2 rimane 1, aggiuntavi pure la decina si dirà 11, da cui tolto il 3, rimane pure 8 da sottoscriversi, ed il 4 diminui-

minuito ancor esso dell' unità rimane 3, onde finalmente dovrà levarsi l' 8 dal 33, che rimarrà 25 da sottoscriversi, per la sottrazione F ivi posta; e così in altre maniere, che si debbano sottrarre alcuni numeri da altri maggiori, potrà similmente farsi con le addotte condizioni da osservarsi.

Per ripruova di aver bene operato, basta sommare il ridotto numero C col numero sottratto B, la qual somma se restituisce il maggior numero A, da cui è fatta la sottrazione, sarà fatta benissimo. Ma se vi riuscisse qualche divario, sarà segno di aver errato nell' operazione; similmente nell' altro esempio si provi di sommare il ridotto numero F col sottratto E, onde si vegga se tale somma è l' istessa, che il maggior numero D, onde fu fatta la sottrazione, il che se avviene, sarà la sottrazione ben fatta; ma se vi fosse diversità, non sarebbe sottratto bene il numero minore E, dal maggiore D.

Si potrebbe ancora ciò provare con ridurre il 9 dalli due numeri B, e C, e vedere se ciò, che restasse in questi due fosse il medesimo, che quello rimarrebbe nel maggior numero A, detratti pure quindi li 9. E similmente nell' altro esempio si tolga il numero 9 dalli due numeri E, ed F, indi si paragoni tal' eccesso con quello del maggior numero D, levatogli il 9, che se sarà il medesimo eccesso in quelli, ed in questo, sarà ben fatta la sottrazione; e se tale non fosse, sarebbe malamente sottratto il minor numero dal maggiore. Però nel primo esempio, se si leva il 9 da' numeri B, e C, rimane 2., ed ancora dal numero A il 2 rimane; e nel secondo esempio tolto il 9 da E,

ed F, resta 5, e dal numero D, rimane il medesimo, onde può credersi l'operazione ben fatta in ambidue gli esempj.

Volendo poi sottrarre i numeri di specie diversa, per esempio il tempo B dal tempo A, ne risulterà C nel modo seguente.

	Giorni.	*Ore*.	*Minuti*.
A	14.	6.	15
B	7.	22.	52
C	6.	7.	23

Non potendosi sottrarre li minuti 52 da' 15, si levi un ora dalle ore 6, la quale importando 60 minuti, aggiunti a' 15 ne diventeranno 75, da' cui tolti li 52, rimarrà da sottoscriversi 23; le ore di A rimarranno 5, e non potendoci cavare le ore 22 di B, si aggiungerà a quell'ore 5 un giorno, cioè ore 24, che riusciranno 29, d'onde cavate le 22, rimarranno 7 da scriverci sotto; poscia li giorni 7 levati da giorni 13 (avendone levato uno dalli 14) ci lasciano giorni 6, però questo ancora si sottoscrive nella sottrazione C.

In quest' altra sottrazione di lire, soldi, e danari, quando il numero inferiore E, da sottrarsi dal maggiore D, al di sopra, ha li danari, ed i soldi maggiori di quelli, che sono nell' altro D, bisogna alli danari del numero superiore aggiungervi un soldo, cioè altri 12 danari, ed a' soldi aggiungervi una lira, cioè soldi 20; onde si dovrà sottrarre danari 8 da 16, e levato quest' 8, rimane parimente 8, che sotto si scrive; e li 3 soldi rimanendo 2, con gli altri 20 sono 22, da' quali sottratto il 6, rimangono

	Lire.	*Soldi*.	*Danari*
D	21.	3.	4
E	15.	6.	8
F	5.	16.	8

no 16 da sottoscriversi ad essi; indi il numero di lire 21 rimane 20, da cui sottratte le 15 lire, rimangono da soscriversi 5 nella sottrazione F: e per provare, che sia ben fatto tale residuo, basterebbe sommare questo F col detratto E, e vedere se riesce lo stesso col numero maggiore D, che se saranno uguali, sarà ben fatta la sottrazione; ma se vi fusse qualche diversità, è certo, che non ben fatta sarebbe tale sottrazione.

Parimente si potrebbe levare li 9 tra B, e C nell' antecedente esempio, e vedere se il rimanente uguagliasse l'eccesso de' 9 nel numero A; e nell' altro conseguente parimente prendere l' eccesso di 9 da E, ed F, ed osservare se l' istesso fosse nel D; detrattine i loro 9 in quella maniera, che nel precedente Capitolo si è avvertito doversi fare ne' numeri di specie diversa; cioè nel primo esempio basterà da B, e C prendere l' eccesso di 9 solamente tra le ore 22, e le 7, il quale eccesso è 2 da moltiplicarsi per 6, che diventa 12, cioè 3 sopra il 9, e da' minuti 52 e 23 l'eccesso di 9 è 3, onde tutto l' eccesso rimane 6, ed ancora nell' A le ore 6 moltiplicate per 6 fanno 36, ove non è veruno eccesso di 9, e poscia ne' minuti 15 parimente rimane 6, onde è ben fatta quella sottrazione; e nel secondo esempio paragonando di E, ed F le lire 15, e le 5, che fanno 20, cioè l'eccesso 2 sopra il 9, e moltiplicandolo per 6 diventa 12, il di cui eccesso sopra 9 è 3; poscia i soldi 6, e 16, che sono 22, hanno l' eccesso 4 sopra il 9, e moltiplicato per 3 fa 12, che pure ha l' eccesso 3, e con l' altro 3 delle lire, fa 6; indi ne' danari 8 ed 8, che sono 16, vi è l' eccesso 7 sopra'l

9, onde con l' altro 6 diventa 13, che importa l' eccesso 4; e parimente nel D il numero delle lire 21, ha l'eccesso di 3 sopra il 9, che moltiplicato per 6 diventa 18, senza verun eccesso di 9, e li soldi 3 moltiplicati in 3 fanno pure 9; onde ne' danari resterà il medesimo 4, sicchè pure è ben fatta questa sottrazione.

Giacchè si è molto discorso di questi eccessi del 9, ed ancora dopo se ne dovrà parlare, stimo bene, che si avvertano alcune proprietà numeriche, competenti ad esso nove: Primieramente l' eccesso di qualunque numero sopra il novesimo, si vede nell' istesse sue note, come 25 è sopra li due nove con l' eccesso di 7, il che si ha dal 2 e dal 5; così pure il 43 eccede li quattro nove di 7, perchè 4 e 3 fanno 7; similmente anche in un grandissimo numero 2142586 3 combinando le note, 2, ed 1, e 4, e 2 fanno 9, poi 5 e 8 fanno 13, che sono 4, li 6, e li 3 fanno pure il 9, dunque l' eccesso di quel numero sopra il novesimo sarà solamente 4; e l' istesso si trova, paragonando le note, che fanno il 9, e prendendo solamente l' altre; così poteva vedersi, che 6 e 3 fa 9, 8 e 1 fà 9, 5, e 4 fa 9, e restano 2, e 2, che fanno 4, onde questo è il suo eccesso sopra il novesimo; e se sarà un numero con le stesse note diversamente poste, come 54213628, o pure 23854162 *ec.* hanno lo stesso eccesso 4.

Secondariamente, se le note del numero poste insieme fanno solamente il 9, e non altro eccesso, quel numero sarà puramente di alquanti nove composto; così perchè 7 e 2 fanno 9, ed ancora 5 e 4, ed altresì 3 e 6 *ec.* perciò i numeri 72, 27,

54,

54, 45, 36, e 63 sono novesimi, ed ancora in numeri maggiori 5724, 6831054, *ec.* vi è il 9 più volte, perchè 7 e 2, con 5 e 4, e 6 con 3, ed 8 con 1, e 5 con 4 importano il 9.

In terzo luogo si può osservare, quante volte sia il 9 in uno di tali numeri novesimi; il 9 è uno, perchè manca dal dieci una unità; il 18 è due 9, perchè manca 2 dal 20; il 27 è tre 9, mancando per 3 dal 30; e così andando avanti fino al 90, che è decimo nono; ed il 99 è undecimo nono; il 108 è il duodecimo, perchè manca per 2 dal 110; il 117 è pure terzodecimo, mancando per 3 dalla seguente decima 120; e così gli altri susseguenti, di maniera che qualunque numero novenario, aggiuntovi il numero, che ha del 9, farà sempre qualche decimo, essendo 9 con 1 uguale a 10, e 18 con 2 uguale a 20, e 27 con 3 uguale a 30, ed ancora il 99 con l' 11 uguale a 110, ed il 108 con il 12 uguale a 120, e così il 207 col 23 è uguale a 230, il 738 con l' 82, fa 820 *ec.*

In quarto luogo si avverta, che due diversi numeri, se sono composti delle medesime note variamente disposte, la loro differenza sarà sempre di qualche novenario. Per esempio 13 da 31 differisce per 18, che sono due 9; così 47 da 74 differisce per 27, che sono tre 9; parimente 17538 da 53781 differirà per 36243, che ha 4027 volte il 9; e similmente 341 da 413 differisce per 72, che sono 8 volte il 9, e 2157 da 5271 differisce per 3114, che sono 346 volte il 9. E così sempre la differenza de' numeri composti delle stesse note alternate importa alquanti 9.

Anzi altri numeri, non con le medesime note composti, ma nè pure con l'istessa moltitudine di esse, purchè i loro Caratteri insieme composti, ne mostrasero lo stesso numero, questi ancora averanno la loro differenza composta di 9: Per esempio 52, e 43, e 16, e 124, e 322. *ec.* ne importano 7, e la differenza di 52 da 43 è appunto il 9, e del medesimo 52. da 16, è il 36, cioè quattro novesimi, da 124 manca per 72, che sono otto novesimi, e da 322 per 270, che sono 30 novesimi. Parimente paragonando il 32 col 104, col 212, le cui note importano il 5, la differenza del primo dal secondo è 72, cioè 8 volte il 9; del medesimo primo dal terzo, la differenza è 180, cioè 20 volte il 9; ed altresì la differenza del secondo dal terzo sarà il 108, che importa 12 volte il 9, e così negli altri. Così la differenza di 6 da 24, o da 42, o da 321 si troverà essere alquante volte il 9, cioè tra il primo, e il secondo la differenza è 18, ed ancora tra il secondo, e il terzo vi è la stessa differenza col 9 due volte, e tra il primo, ed il terzo la differenza è 36, che ha 4 volte il 9, e la differenza tra il terzo, e il quarto è 279, che importa il 9 per 31 volta, *ec.*

Finalmente, se sono diversi gli eccessi del 9 in un numero, e in un altro, quando il maggior numero abbia maggiore eccesso, ed il minore un altro eccesso minore di quello, la differenza di tali eccessi sarà la medesima; con cui la differenza de' numeri proposti eccede il 9. Per esempio siano questi due numeri 347, 228; l'eccesso del 9 nel primo, che è maggiore, sarà 5, perchè 7, e 4

fa

fa 11, e 3 con esso fa 14, in cui 4 e 1 fa il 5, nel secondo, che è minore l' eccesso del 9 sarà 3 (perchè 2 e 2 fa 4, e con 8 il 12, in cui 1 e 2 fa 3) minore dell' altro eccesso, la differenza de' quali eccessi è il 2; così ancora la differenza del maggior numero dal minore, che sarebbe 119 (perchè 119 con il 228 fa il 347) ha pure il 2 eccesso sopra il 9. Ma se il maggior numero ha un eccesso di 9 minore dell' eccesso, che averà il minor numero; la differenza di questi eccessi si levi dal 9, ed il resto sarà l' eccesso di 9, che ha la differenza di un numero dall' altro. Per esempio siano i numeri 21, e 17 l' eccesso del primo, e 3, del secondo è 8, la differenza de' quali è 5, e levato il 5 dal 9, resta 4, dunque la differenza di 21 da 17, è per appunto il 4, e così negli altri.

CAPITOLO V.

Del moltiplicare i numeri della medesima specie.

VOlendo moltiplicare un numero con un altro numero, bisogna che si moltiplichi qualunque nota dell' uno con ciascuna nota dell' altro, e disporre le note risultanti nel numero prodotto a' suoi luoghi convenienti, sommando insieme, quando occorre, quelle note, che alla medesima specie delle decine, delle centinaia, delle migliaia *ec.* appartengono.

Per esempio volendo moltiplicare 2467 per 134, si principj a moltiplicare le note di quel primo numero per l' ultima nota del secondo, che è 4, dicendo: 4 via 7 fa 28, onde si scrive 8 nel luo-

go dell' unità, e portato avanti il 2, essendo 4 via 6 uguale a 24, con esso 2 fa 26, però scrivo 6 nel luogo delle decine, e trattengo 2, che aggiunto a 4 via 4 uguale 16, diviene 18, e però scrivo 8 nel luogo de' centesimi, e trattengo l' unità, indi 4 via 2 diventa 8, e coll' 1 fa 9, che sarà la prima nota da aggiungervi; onde quel dato numero 2467 moltiplicato per 4 riesce 9868. Indi moltiplico lo stesso per l' altra nota 3 della decina, dicendo 3 via 7 fa 21, però scrivo 1 sotto la penultima nota, posto il zero sotto l' ultima, e ritengo il 2, indi moltiplicato 3 via 6 riesce 18, ed aggiuntovi il 2 fa 20, onde scrivo nella parte antecedente esso zero, e trattenuto il 2, moltiplicato il 3 via 4, che fa 12, col 2 riesce 14, onde scrivo il 4 verso la parte millesima, e tengo l' unità, indi 3 via 2 essendo 6, coll' 1 diventa 7, che sarà la prima nota in questa moltiplicazione, però lo stesso primo numero, moltiplicato per 3 decine diviene 74010; poscia lo stesso numero moltiplicato per l' unità posta nella parte centesima, rimane lo stesso con due zeri aggiuntivi, cioè 246700, e sommando questi tre numeri così disposti, trovo riuscirne 330578, e questa sarà la moltiplicazione di 2467 per 134.

```
  2467
   134
------
  9868
 74010
246700
------
330578
```

Però si avverta primieramente, che volendo moltiplicare un numero per 10, basta aggiungere a quel tal numero un zero, e volendo pure moltiplicarlo per 100, basta gli si aggiungano due zeri, e se si moltiplica per mille, basta aggiungervi tre zeri, e così di mano in mano. Per esempio, il

il 45 moltiplicato per 10, viene 450, per cento: riesce 4500, per mille fa 45000. per dieci mila 450000. *ec.*

Similmente, quando un numero finisce in uno, o più zeri, si possono questi separare, e fare la moltiplicazione delle note che restano, e poscia al prodotto aggiungere li zeri già separati; come volendo moltiplicare 320, per 42, basta si moltiplichi 32 per 42, ed al prodotto 1344 aggiungasi uno zero, che riuscirà 13440. Anzi essendo e nel moltiplicante, e nel moltiplicato alquanti zeri, basterà separarli dall' uno, e dall' altro, e poi moltiplicate insieme le rimanenti note si aggiungeranno al prodotto tutti quegli zeri, che si erano levati dall' uno, e dall' altro; così volendo moltiplicare 623000 per 18400 basterà moltiplicare 623 per 184, che ne siuscirà 114632, ed aggiuntivi li cinque zeri levati da' detti numeri proposti, si averà l' intero prodotto 11463200000, che appunto sarà il prodotto di 623000 per 18400, come doveva farsi.

Si avverta pure, che tanto è il moltiplicare de' due numeri il primo col secondo, quanto moltiplicare il secondo col primo; però di essi numeri proposti a moltiplicarsi, talvolta è utile prendere quello, che è composto di note più semplici, e che danno più facile la moltiplicazione dell' altro con questo, onde riesce più agevole il prodotto, e meno soggetta agli errori sarà la moltiplicazione; come per esempio, dovendosi moltiplicare 785 per 23 riesce più facile il moltiplicare il primo per mezzo del secondo, cioè per 3 e per 2, che il moltiplicare il secondo per 5, e per 8, e

per

per 7; ed ancora è meglio moltiplicare il maggiore per il minore, che questo per quello, sebbene torna poi lo stesso in qualsivoglia modo si disponga l'operazione.

Volendo poi riprovare se siasi bene operata la moltiplicazione, si potrà rifarla nell' altro modo; cioè se si è moltiplicato il primo pel secondo, si moltiplichi pure il secondo per il primo, dovendoci tornare il medesimo: per esempio, essendosi di sopra moltiplicato 2467 per 134 si può di nuovo moltiplicare il 134 per 2467, cioè per 7, si moltiplichi, e ne riuscirà 938, indi per 6 diventerà 804, poscia per 4, averemo 536, indi per 2 riuscirà 268; li quali numeri posti secondo l' ordine suo, aggiungendo all' 804 un zero, al 536 due zeri, ed al 268 tre zeri, sommandogli, ne riesce come prima la moltiplicazione 330578, onde fu fatta bene ancora la prima.

```
   134
  2467
------
   938
  8040
 53600
268000
------
330578
```

Essendo pure il 134 uguale al doppio di 67, si potrebbe moltiplicare il 2467 per 67, che sarebbe 165289, il che moltiplicato per 2 farà pure 330578 come sopra; onde è fatta benissimo tale moltiplicazione; Anzi in un altra maniera può rifarsi la moltiplicazione, osservando, che il 134 è uguale al 100, al 10, al 20, ed al 4, però moltiplicando il 2467 per 100, sarà 246700, indi per 10 fa 24670, poscia per 20 riesce 49340, e finalmente per 4 sarà 9868, li quali numeri computati insieme,

```
246700
 24670
 49340
  9868
------
330578
```

fan-

fanno l' istessa somma 330578. uguale all' istessa moltiplicazione di 2467, per 134, onde in tutte quelle maniere è ben fatta; ed in simili modi si potrà moltiplicare qualunque numero con un altro, che si proponga.

Si potrebbe ancora rigettare il 9 dalle note di un numero de' due da moltiplicarsi, e fermarne l' avanzo, e similmente dall' altro cavatone l' avanzo del 9, moltiplicare l' uno nell' altro avanzo, di cui pure detratto il 9, si osservi, se nel prodotto della moltiplicazione vi sia lo stesso eccesso del 9. Per esempio, moltiplicando 635 per 24, moltiplicato quello per questo, cioè per 4, e per 2, se ne troverà 15240 prodotto della moltiplicazione; ora l' eccesso del 9 in 635 è appunto 5 (perchè 6, e 3 fanno 9) e nel 24 detto eccesso sarà 6 (composto di 4 e 2) ora 5 via 6 fa 30, in cui l' eccesso sopra il nove è il 3; bisogna dunque vedere, se lo stesso eccesso sia nel numero ridotto della moltiplicazione 15240; In esso 5 e 4, fanno il 9, poscia il 2 con l' uno fa il 3; dunque vi è lo stesso eccesso di 9, che era nel prodotto degli eccessi de' numeri moltiplicandi, onde non è fatta male la moltiplicazione; che se non fosse riuscito il medesimo avanzo, non sarebbe ben fatta. Similmente nella proposta moltiplicazione al di sopra di 2467, in 134, nel primo facendosi 9, il 2 col 7, e riuscendo 10 il 4 col 6, rimane l' eccesso del 9 solamente 1, e nell' altro numero 134, si trova 4, e 3 sette, ed 1, fa 8, il quale moltiplicato per 1, fa pure 8; sicchè

```
   635
    24
 -----
  2540
 12700
 -----
 15240
```

bi-

bisogna, che pure nel prodotto della moltiplicazione 330578 ci sia il medesimo 8 per eccesso di 9; in fatti 3 e 3 fanno 6, e 5 fanno 11., e 7 farà 18, che ha 2 volte il 9; indi resta l' 8 eccesso di 9, come doveva esservi, e però è ben fatta ivi pure la moltiplicazione.

Che se in uno de' numeri da moltiplicarsi, detratto il 9, nulla vi avanzasse, benchè vi fosse nell' altro numero l' eccesso del 9, non occorre badarci, perchè moltiplicato il 9 per qualunque altro numero riesce pure novesimo, onde ancora nel prodotto della moltiplicazione nulla ci potrà avanzare sopra il 9, come per esempio, volendo moltiplicare 6813 per 24, come che nel primo il 6 e 3 fa 9, ed ancora 8 e 1 fa 9, e nulla ci avanza, però moltiplicando il primo per 4, e poscia per 2, la cui somma riesce 163512, si vede, che in essa pure non vi è avanzo veruno di 9, perchè 6 e 3 fanno 9, e 5 con 2 fanno 7, e con le due unità riescono pur 9, e nulla ci avanza, che se vi fosse qualche avanzo non sarebbe fatta bene la moltiplicazione.

$$\begin{array}{r} 6813 \\ 24 \\ \hline 27252 \\ 136260 \\ \hline 163512 \end{array}$$

CAPITOLO VI.

Del dividere i numeri nella medesima specie.

VOlendo dividere qualunque numero maggiore per mezzo di un minore, si principia l' operazione dalla sinistra, cioè dalle prime, non dalle ultime note dell' unità, osservando di applicare il divisore a tante note del numero dividendo,

che

che almeno poſſa una volta contenerſi in eſſo, o alquante volte meno di dieci; onde ſi ſottoſcrive la nota del numero ivi trovato, e quell' avanzo, che ſi farà in eſſo, ſi uniſce alle note ſuſſeguenti del propoſto numero, e vi ſi rimette ſotto il diviſore per ricercare quante volte di nuovo contengaſi in eſſo; indi notando pure il numero del diviſore ivi trovato, ed aggiuntone l' avanzo all' altre note ſeguenti, ſe vi ſono, che comprendano eſſo diviſore, ſi fa la ſottoſcrizione dell' altro numero trovatovi; ed in ultimo avanzandone qualche coſa, con eſſa ſe ne farà una frazione denominata dal medeſimo diviſore, come ne' ſeguenti eſempj.

Sia da dividerſi 249 per 3; non entrando il 3 nel 2, biſognerà paragonarlo alli 24, in cui trovandolo 8 volte, perciò dopo una lunetta ſi ſcrive 8; indi ſi paragona il 3 col 9, in cui entrando tre volte, ſi aggiunge dopo l' 8 il 3, e però la diviſione reſta compiuta nel numero 83.

2 4 9
3 (8 3

Volendo poi dividere 17336 per 22, non entrando 22 in 17, ſi paragona al 173, in cui vi entra 7 volte eſſo 22, che ſarebbe 154, e ne avanza 19, al quale aggiuntavi l' altra nota 3, ſi cerca quante volte entri il 22 nel 193, e ſi vede ritenercisi 8 volte, che ſarebbe 176, onde ne avanza 17, però aggiuntavi la nota 6 ritorna 176, in cui di nuovo ſi comprende 8 volte il 22, però dopo la lunetta ſi dovranno ſcrivere il 7 e l' 8 due volte, onde la diviſione ſarà 788 ſenza veruno avanzo.

1 7 3 3 6
2 2 (7 8 8
1 9 3
2 2
1 7 6
2 2

Se

Se poscia si divide 2594 per 12, questo nel 25 entra due volte, e ne avanza 1, scrivasi però dopo la lunetta il 2; ed all' 1 aggiunto il 9 si fa 19 nel quale il 12 entra una volta, però dopo il 2 si scrive 1, ed avanzandoci 7 aggiuntovi il 4, riesce 74, in cui trovasi il 12 sei volte, onde si scrive dopo il 21 il 6, ma esso 12 via 6 facendo 72, ne avanzano 2, che però alla divisione 216 bisognerebbe aggiungervi per frazione ancora $\frac{2}{12}$, i quali divisi ambidue per mezzo, si dovranno fare la stessa frazione $\frac{1}{6}$; onde la divisione di 2594 per 12 riesce 216 $\frac{1}{6}$, che dirassi dugento sedici, o un sesto.

```
2594
12      (216 1/6
 19
 12
  74
  12
```

Si osservi però, che la divisione di 17336 per 22 poteva farsi di 8668 per 11, e quella di 2594 per 12, si sarebbe potuta fare del numero 1297 per 6; imperocche li due numeri proposti essendo pari, si possono ambidue dividere per mezzo, e se riuscissero di nuovo pari, si dovrebbero di nuovo ambidue dimezzare, fino a tanto, che uno di essi riuscisse dispari, essendo che la stessa quantità riesce nella divisione di qualunque numero in un altro, come riuscirebbe dal doppio di quello, nel doppio di questo, o dal quarto dell'uno nel quarto dell'altro, o di qualsivoglia parte dell' uno nella parte simile dell' altro; onde ancora, se tutti due i numeri potessero dividersi ancora per 3, o per 5, o per 9, o per 10, o per 100. *ec.* basta fare la divisione di quelle parti in vece de' dati numeri interi: Così proponendosi la divisione di

2430 per 50, basta fare la divisione di 243 per 5, che sarà 48 $\frac{3}{5}$, essendo 5 via 48 il 240, cui rimane il 3 divisibile per 5., e ciò sarà l' istessa divisione di 2430 per 50; similmente proponendosi la divisione di 963 per 213, divisi per 3 ambidue questi numeri, diviene il primo 321, il secondo 71, e quello diviso per questo darà 4 $\frac{37}{71}$, perchè 4 via 71 fa 284, al quale aggiunto il 37 fa 321.

E chi volesse dividere 3800 per 700., basterà dividere 38 per 7, che sarà 5 $\frac{3}{7}$, imperocchè 7 via 5 fa 35, e dal 38 ne avanza il 3., che importa quella frazione $\frac{3}{7}$ da aggiungersi al 5.

Essendo da dividersi un numero grande con un altro di molte note, conviene applicare questo ad altrettante note di quello, se pure non riuscisse minore la prima nota del dividendo della prima nel divisore, altrimenti si porranno le note di questo, sotto un alquanto maggior numero di quello, per osservare, che ci entri dentro; e se vi fosse contenuto una volta sola, si scriverebbe dopo la lunula una unità; se poi vi entra più volte, si moltiplichi il divisore per 2, o per 3, o per altro numero, osservando se entra in quella parte del numero dividendo; e quello, che ci avanza si aggiunga ad un altra delle note seguenti, e ridottovi sotto lo stesso divisore, si proseguisca la divisione, osservando come entri questo in quello, e similmente si proseguisca, come apparirà nel seguente esempio.

Sia da dividersi il numero A per il numero B; vedendoli ambidue pari, si divideranno per mezzo tutti

A	742806253 8
B	61024572
C	371403126 9
D	30512286

ti e due, sicchè da A ne provenga C, e da B ne risulti D; ma osservando che sono ancora C, e D compresi da note, che fanno il 9 senza veruno eccesso (come ancora così erano li primi A e B) converrà ancora dividerli per 9, che riusciranno questi altri due E, ed F; però si dividerà questo da quello; dunque si sottoponga l'F al G, in cui sono altrettante note di E, quante sono nel divisore, e si vedrà, che vi entra una volta sola, onde dietro la lunula si scrive 1, e cavandone ciò, che di più vi rimane H, gli si aggiunge l'altro numero di E, che è il 4 delli due tralasciati,

E	612670141	
F	3390254	
G	6126701	
F	3390254	(180
H	2736447	
K	27364474	
F	3390254	
L	27122032	
M	242442	
N	2424421	

e fatto così il numero K, gli si pone sotto il medesimo F, che ci si vede contenuto 8 volte, però nella lunula si aggiunge l'8, e perchè l'ottuplo di F sarà L, e questo tolto dal K riesce l'M, al quale aggiunta l'ultima nota 1 del numero E, che sarà il numero N, in cui non entrando il numero F, maggiore di esso, conviene aggiungere nella lunula lo zero; sicchè 180 sarà la quantità de' numeri interi della divisione, ma bisognerà aggiungerci la frazione di N diviso per F, cioè tutta la divisione de' suddetti numeri cioè di A per B, dovrà essere per appunto 180. $\frac{2424421}{3390254}$

N $\frac{2424421}{3390254}$ F

Vo-

Volendo poi dividere un numero per 10. basta separarne l' ultima nota, da cui si farà la frazione del divisore 10. Per esempio, volendo dividere per 10 il 253 basterà scrivere 25 $\frac{3}{10}$, e volendo dividere per 10 il 3457, si averà per divisione 345 $\frac{7}{10}$. E se un numero si vorrà dividere per 100, bisognerà separarne le due note ultime, colle quali si farà pure la denominazione di esso divisore 100; così 849178 diviso per 100 sarà 8491 $\frac{78}{100}$, ma questi 78, e 100 potendosi dividerli pel mezzo, converrà farne la divisione, e ne nascerà la frazione $\frac{39}{50}$ Così pure l' 8497 diviso per 100, riuscirà solamente 84 $\frac{97}{100}$; e similmente se si ha da dividere un numero per 1000, dovranno separarsi da esso le tre ultime note, le quali faranno la frazione da mille denominata, come dovendosi dividere per mille il numero 458937, si dovrà fare 458 $\frac{937}{1000}$ per tale divisione; e così in altre simili.

Per la riprova poi della quantità di essa divisione, basterà moltiplicare il quoziente per il divisore, e vedere se il prodotto sia il medesimo numero proposto a dividersi, come certamente esser deve, se la divisione sia ben fatta: Per esempio, se dividendo 249 per 3, si trova 83, bisogna, che 83 per 3 moltiplicato faccia pure 249; e così pure se 17336 diviso per 22 fa 788, converrà che il 788 moltiplicato per 22, faccia 17336; e se vi sono alla divisione delle frazioni, oltre il prodotto del divisore co' numeri interi della divisione, vi si aggiunge ancora il numeratore, che è al di sopra nella frazione; come per esempio, avendo diviso 321 per 71, onde si ritrovò 4 $\frac{37}{71}$, basterà moltiplicare il 71 per 4, che farà 284, ed aggiuntovi

tovi li 37, ne proviene lo stesso 321, come di sopra si è detto.

Similmente, quando sia fatta con esattezza la divisione, bisogna che l'eccesso del 9 del divisore, moltiplicato con l'eccesso del 9 del quoziente, faccia lo stesso eccesso del 9, che ha il numero, il quale fù divisibile. Per esempio 1104 per 23 diviso, ci dà per quoziente il 48; in questo l'eccesso del 9 sarà 3, e nel divisore è 5, ora 3 via 5 fa 15, che è un eccesso 6 di 9, ma ancora nel dividendo 1104 si trova per eccesso di 9 il 6, dunque è ben fatta la divisione; ma se pure nel quoziente vi è una frazione, al prodotto dell'eccesso di 9 del divisore, con quello del numero sciolto nella divisione, gli si aggiunga l'eccesso del 9, che ha il numeratore della frazione, e questa somma dovrà essere uguale all'eccesso di 9, che ha il numero dividendo: Per esempio, si divida 578 per 13, si troverà il quoziente 44 $\frac{6}{13}$, dunque l'eccesso del divisore 13 sopra il 9 essendo 4, e l'eccesso di 44 essendo 8, si moltiplichi 4 via 8, fa 32, il cui eccesso sopra il 9 è 5, aggiunto a questo 5 il 6, si farà 11, cioè l'eccesso di 9 sarà 2, il che pure si trova nel dividendo 578, perchè 5, e 7 fa 12, e 8 fa 20. Così pure dividendosi 1350 per 23, si troverà essere 58 $\frac{16}{23}$ il suo quoziente; ed essendo l'eccesso di 9 nel 23 il 5, nel 58 il 4, e 5 via 4 facendo 20, si ha per tale eccesso di 9 il 2, al quale aggiunto l'eccesso di 16, che è 7, si fa per appunto 9, ed ancora il dividendo ha il 135 per 9 senza veruno eccesso, perciò quella divisione dovrà essere ben fatta, non essendovi nel quoziente moltiplicato col divisore, e composto

posto col numero superiore della frazione, veruno eccesso del 9, come non vi è nel dividendo. Che se il dividendo fosse stato 1352, con lo stesso divisore 23, sarebbe stato il quoziente 58 $\frac{18}{23}$, ed esso numero 18 non avendo eccesso di 9, non occorrerà aggiungerlo al prodotto dell' eccesso di 23 coll' eccesso di 58, che abbiamo veduto esser 2, come appunto nel dividendo 1352 vi è l' eccesso di 2 sopra il 9.

CAPITOLO VII.

Del moltiplicare i numeri di specie diversa.

Questa moltiplicazione de' numeri di specie diversa è assai più difficile di quella de' numeri della medesima specie; imperocchè essendo i numeri composti di varie specie, converrà prima ridurre ciascuno alla specie infima, e poscia moltiplicarli insieme, quindi per via della divisione ridurre il prodotto a' termini di ciascuna specie naturale. Ma però conviene ancora osservare, che moltiplicando qualche quantità continua espressa in detti numeri, con un altra quantità continua parimente in numeri espressa, il prodotto non sarà una quantità del medesimo ordine, con ciascuno de' numeri producenti; ma d' un ordine più alto, paragonandosi questo a quello, come una superficie alla linea, che gli serve di semplice lato, o come il corpo ad un piano, che gli serve di superficie.

Così per esempio, 3 braccia di lunghezza, se si moltiplicassero solamente per un numero 4, certo riuscirebbero 12 braccia di essa lunghezza; ma

ſe quelli ſi devono moltiplicare per 4 braccia pure di larghezza, ne doveranno reſultare 12 braccia quadre, che ſaranno d' ordine ſuperiore alle 12 braccia lineari eſprimenti la ſola lunghezza; ſimilmente 8 ſoldi di lunghezza moltiplicati per 3 ſoldi pure di larghezza, faranno 24 ſoldi ſuperficiali; e non è già vero, che queſti ſoldi 24 equivagliano ad un braccio di ſoldi 20 con 4 ſoldi di più del ſuo genere, perchè non baſtano ſoldi 20 a fare un braccio quadro, o ſuperficiale, ma ci vogliono ſoldi 400; e la ragione ſi è, perchè 20 ſoldi di lunghezza, che fanno nella lunghezza un braccio, moltiplicandoli per 20 altri ſoldi, danno il valore d' un braccio quadrato, eſpreſſo con ſoldi 400 ſuperficiali; ſimilmente facendoſi un ſoldo di lunghezza con 12 danari, ſe queſti ſi moltiplicheranno con altri 12 danari, faranno un ſoldo quadrato, col valore di 144 danari di ſuperficie, onde ſiccome un braccio quadro ſi fa con 400 ſoldi quadrati, biſogna che nello ſteſſo valore di un braccio quadro vi ſi includano 57600. danari ſuperficiali.

Poſto queſto avvertimento, prendiamo un eſempio. Sia una Camera di lunghezza braccia 8 ſoldi 5 e danari 6, e ſia la ſua larghezza braccia 7 ſoldi 6 e danari 8, e ſi convenga moltiplicare quella in queſta per ricavarne la quantità del pavimento, che ſarà compoſto di alquante braccia quadre, con alcuni ſoldi, e danari quadrati, e fatta la moltiplicazione ſi trova, che ſaranno braccia quadre 60 ſoldi quadri 248, e da-

Braccia.	*Soldi.*	*Danari.*
8.	5.	4
7.	6.	8
60.	248.	128

danari quadri 128, imperocchè avendo ogni soldo danari 12, ed ogni braccio soldi 20, averà il braccio danari 240, onde braccia 8 averanno danari 1920, e li soldi 5 averanno danari 60, a' quali aggiunti li danari 4 della lunghezza, il tutto sarà danari 1984; ma quanto alla larghezza, braccia 7 saranno danari 1680, e li soldi 6 ne vengono danari 72, a' quali aggiunti li danari 8, riesce il tutto danari 1760; però moltiplicando questi 1760, con quelli danari 1984, ne risultano danari quadrati 3491840.

1920
60
4
1984

1680
72
8
1760

Per determinare poi quante braccia quadre, e quanti soldi quadrati, e quanti danari quadrati ne risultino in quella superficie del pavimento della camera, essendo ogni braccio quadro composto di 57600 danari quadrati, bisogna dividere esso 3491840 per 57600, onde ne procederanno braccia quadre 60, importando queste danari quadri 3456000, ed il residuo sarà 35840, che diviso per 144 danari, valore di ciascun soldo quadrato, si troverà per quoziente 248 soldi quadrati, importando questi danari quadri 35712, onde poi rimangono 128 danari quadrati, essendo manifesto, che appunto 3456000 (che sono 60 braccia quadre) con 35712 (che sono 248 soldi quadri) e con li 128 danari quadri sommati insieme, fanno il numero 3491840 di danari quadrati, che si trovò in detta moltiplicazione; e però fù ben fatta,

3456000
35712
128
3491840

ta, corrispondendo benissimo insieme tutti i calcoli di sopra esposti.

Nel trattato aritmetico di Giuseppe Maria Figatelli, ricorretto, ed accresciuto da Gaetano Guidi Bolognese, verso il fine del Capitolo terzo, si apporta, che moltiplicando le lire 4, soldi 5, e danari 6 con lire 3 soldi 10, e danari 8; ne debba succedere lire 15, soldi 2, e danari 1 con $\frac{1}{5}$, il che io mostrerò esser falso, dovendone piuttosto riuscire lire 15, e soldi quadri 42; imperocchè le lire comprendendo 20. soldi, e li soldi 12 danari, è certo, che lire 4 sono soldi 80, e però danari 960, li soldi 5 sono danari 60, ed aggiunti li danari 6, la somma di essi sarà danari 1026; poscia le lire 3 essendo soldi 60 sono danari 720, li soldi 10 sono pure 120 danari, ed aggiunti danari 8, la loro somma sarà 848 danari; però moltiplicando quelli con questi, si fanno 870048 danari quadrati, perchè 848 in 1000, fa 848000, in 20 fa 16960, ed in 6 fa 5088, la somma de' quali è 870048, ed avendo la lira quadra 57600 danari quadrati, si vede, che questo è in quello 15 volte, perchè moltiplicato 57600 in 15 farà 864000, e tolto questo da 870048, ne rimane

lire	4.	5.	6
lire	3.	10	8
lire	15.	42	—

960
60
6
———
1026

720
120
8
———
848

1026
in 848
———
848000
16960
5088
———
870048

6048

6048; ma il ſoldo quadro ha 144 danari quadrati, che moltiplicati in 42 fanno pure 6048; dunque la moltiplicazione di lire 4 ſoldi 5, e danari 6 in lire 3 ſoldi 10, danari 8, fa lire quadre 15, e ſoldi quadri 42, come abbiamo detto.

57600 *in* 15
864000
870048
meno 864000
rimane 6048
uguale a 144 *in* 42

Si può ancora in un altra maniera fare tal moltiplicazione, eſſendo ogni ſoldo il vigeſimo della lira, ed un danaro è $\frac{1}{240}$ di eſſa lira, perciò lire 4 ſoldi 5, e danari 6, ſono lire 4 e $\frac{5}{20}$ e $\frac{6}{240}$, cioè lire 4 $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{40}$, che ſarà pure 4 $\frac{11}{40}$ (poichè $\frac{1}{4}$ è $\frac{10}{40}$) ſimilmente lire 3 ſoldi 10 e danari 8, ſaranno lire 3 $\frac{10}{20}$ e $\frac{8}{240}$, cioè lire 3 $\frac{1}{2}$, e $\frac{1}{30}$, che ſaranno lire 3 $\frac{16}{30}$ (perchè $\frac{1}{2}$ è $\frac{15}{30}$) o dicaſi piuttoſto lire 3 $\frac{8}{15}$; e moltiplicando le lire 4 $\frac{11}{40}$ in 3 $\frac{8}{15}$, ſi averanno lire 12 $\frac{32}{15}$ è $\frac{33}{40}$ ed $\frac{88}{600}$; La frazione $\frac{32}{15}$ e 2 $\frac{2}{15}$, la $\frac{88}{600}$ ſarà $\frac{11}{75}$; dunque eſſa moltiplicazione averà lire 14 $\frac{2}{15}$ e $\frac{33}{40}$ ed $\frac{11}{75}$; ma $\frac{2}{15}$ è uguale a $\frac{10}{75}$ (eſſendo il 15 via 5 uguale a 75, ed il 2 via 5 uguale a 10.) dunque rieſce lire 14 $\frac{21}{75}$, e $\frac{33}{40}$; ma il $\frac{21}{75}$ è lo ſteſſo che $\frac{7}{25}$ (dividendo per tre il 21, ed il 75.) e $\frac{7}{25}$ con $\frac{33}{40}$ è $\frac{1105}{1000}$, perchè la ſomma di due frazioni può farſi moltiplicando il numeratore di ciaſcuna col denominatore dell' altra, e ciaſcuno denominatore con l' altro denominatore (come ſe ne parlerà nel Capitolo XI.) onde 7 via 40 fa 280, e 33 via 25 fa 825, che aggiunto all' altro 280 fa per l' appunto 1105, ed il 40 via 25 fa 1000, e tale frazione $\frac{1105}{1000}$ è uguale ad 1 e $\frac{105}{1000}$, anzi 1 e $\frac{21}{200}$, dunque la moltiplicazione fa lire 15 $\frac{21}{200}$,

ma $\frac{21}{200}$ è lo stesso che $\frac{42}{400}$, ed ogni soldo quadrato è la quadricentesima parte della lira quadra, siccome il semplice soldo è la parte vigesima della semplice lira, essendo appunto il quadrato di 20. esso 400. dunque tale moltiplicazione importa lire quadre 15, e soldi quadri 42, come si era nell' altra maniera dimostrato.

Se poi un numero composto di più specie dovesse moltiplicarsi per un semplice numero, come se scudi 15 lire 4 soldi 13, e danari 8 dovessero moltiplicarsi per 6, allora non esce dall' ordine suo la specie della quantità moltiplicata, onde basta moltiplicarne ciascuna specie per il numero dato, cominciando però dall' inferiore, e secondo il suo accrescimento riducendolo nelle specie superiori. Così 6 via 8 fa 48 danari, che importa 4 soldi, ciascuno de' quali è composto di danari 12; e 4 via 12 è pure 48, indi moltiplicando soldi 13 per 6 ne risultano 78 soldi, a' quali aggiunti gli altri 4, riescono 82 soldi, de' quali ogni vigesimo facendo una lira, ne riescono lire 4 e soldi 2, poscia le lire 4 moltiplicate per 6 fanno lire 24, e con le altre 4 riescono lire 28, delle quali ogni 7 lire facendo lo scudo Fiorentino, bisogna importino scudi 4; e finalmente moltiplicando per 6 gli scudi 15 riescono scudi 90, ed aggiunti gli altri 4 saranno scudi 94; dunque moltiplicati pel numero 6 gli scudi 15, lire 4, soldi 13, e danari 8, ne riescono scudi 94, e soldi 2 solamente, e questo è il prodotto di tale moltiplicazione, la quale non può farsi più facilmente, se non in questa maniera; e similmente potrà farsi qualunque altra molti-

pli-

plicazione di qualsivoglia altra specie in qualsivoglia numero dato.

Per via dell' eccesso di 9 può mostrarsi pure, non essere mal fatta tale moltiplicazione; si osservi però, che l' eccesso sopra il 9 ne' soldi deve moltiplicarsi per 3, avendo ciascun soldo danari 12, il cui eccesso sopra 9 è 3, l' eccesso poi di 9 nelle lire, che hanno 20 soldi, deve moltiplicarsi per il doppio di 3, cioè per 6; l' eccesso degli scudi, che 7 volte ciascuno ha la lira, deve moltiplicarsi per 7 in 6, che sarebbe 42, onde esso eccesso è il 6; dunque essendo proposti gli scudi 15, il cui eccesso sopra 9 è 6, essendo 6 via 6 uguale a 36, non vi è eccesso di 9; ma per le lire 4, moltiplicato il 4 in 6, fa 24, dove pure vi è l' eccesso di 6; ne' soldi 13 l' eccesso è 4, che moltiplicato per 3 fa 12, che pure ha l' eccesso 3, e con l' antecedente eccesso 6 delle lire fa 9, il che si lascia; dunque solamente ci resta il numero 8 de' danari, che moltiplicato pel numero moltiplicante, cioè 6, farebbe 48, che è un eccesso sopra al 9 solamente di 3. Quanto alla moltiplicazione, che da scudi 94, e soldi 2; l' eccesso degli scudi sopra 9 è 4, che moltiplicato in 6 fa 24, che pure ha l' eccesso di 6, e l' eccesso 2 de' soldi moltiplicato in 3 fa pur 6, dunque la somma di 6, con l' altro 6 sono 12, che ha l' eccesso pure di 3, come di sopra si è veduto competere al prodotto di scudi 15 lire 4 soldi 13, e danari 8 moltiplicati in 6; però riesce ben fatta quella moltiplicazione.

CA-

CAPITOLO VIII.

Del dividere i numeri di più specie con un numero semplice, o con numeri di altrettante specie.

DOvendosi per esempio convenire 7 persone alla paga di lire 26, soldi 9, e danari 8, conviene dividere la somma di queste specie pel numero 7, acciò si sappia quello, che ciascheduna di tali persone doverà pagare. Primieramente divise le lire 26 per 7, toccheranno lire 3 per ciascheduno, perchè 3 via 7 fa 21, ed avanzandosi 5 lire, queste si risolvono in tanti soldi, che ne importeranno 100, ed aggiuntovi il numero de' soldi 9, bisognerà dividere 109 per 7, che riusciranno soldi 15, i quali da ciascheduno pagandosi saranno 105, dunque ne avanzeranno soldi 4, che risoluti in danari saranno 48, ed aggiunti gli altri 8 danari fanno 56, i quali divisi per 7 riusciranno appunto 8 danari per ciascheduno; sicchè ogni persona dovrà pagare lire 3 soldi 15, e danari 8. onde sarà ben fatta la proposta divisione.

Se poi vi avanzassero altri danari, bisognerà fare di quell' avanzo una frazione denominata dal numero della divisione. Per esempio, se la stessa paga di lire 26 soldi 9, e danari 8 si dovesse dividere solamente per 3 persone; le lire 26 divise per 3 danno lire 8, che è il terzo di 24, e ne avanzano 2, che ridotte in soldi ne fanno 40, cui aggiunto il 9, e diviso il numero di 49 in 3, ne vengono 16, che sono il terzo di 48, onde

avanza

avanza un soldo, il quale avendo 12 danari con gli altri 8, riescono 20, e questi divisi per 3, ne risultano 6, che sono il terzo di 18, ed avanzano 2 danari, il quale avanzamento diviso per 3 ci da la frazione di $\frac{2}{3}$; sicchè qualunque persona dovrà pagare lire 8, soldi 16, e danari 6 con $\frac{2}{3}$, e così sarà compiuta la divisione, la quale se si dovesse fare da essi più volte, per esempio qualunque mese, dovrebbe ciascuno in tre mesi dare tutta la paga di lire 26, soldi 9, e danari 8.

Dovendosi poi dividere un numero di più specie, con un altro di altrettante specie, converrà ridurre questo, e quello al numero della loro infima specie, e poi fatta la divisione, ridurre il quoziente nelle sue specie. Per esempio, il piano di una superficie di braccia quadre 60, con soldi quadri 248, e danari quadri 128, si vorrebbe dividere per la lunghezza di un lato di braccia 7 soldi 6, e danari 8; si riduca primieramente la quantità dividenda, nel numero dell' infima sua specie, cioè de' suoi danari superficiali, e poscia la quantità dividente si riduca nel numero inferiore delli danari semplici; sicchè avendo ogni braccio quadro 57600 danari superficiali, bisogna che le braccia 60 ne contengano 3456000, ed i soldi quadri avendone ciascuno 144, i soldi 248 conterranno danari superficiali 35712, ed aggiunti gli altri danari 128, la somma di tutti saranno danari superficiali appunto 3491840; similmente ogni braccio di lunghezza avendo 240 danari semplici, nelle braccia 7 ve ne saranno

$$\begin{array}{r} 3456000 \\ 35712 \\ 128 \\ \hline 3491840 \end{array}$$

1680

1680, e ne' soldi 6 (essendovi 12 danari per ciascheduno) importeranno danari 72, onde quelli e questi, con gli altri 8 danari, fanno danari 1760; dividasi adunque il primo 3491840, con questo secondo 1760, anzi essendovi il zero in ambidue, può levarsi, ed i rimanenti numeri 349184 e 176 potendo ancora esser divisi ambidue per 16, riuscirà quello 21824 e questo 11, perciò basterà dividere esso 21824 per 11, e ne verrà appunto 1984; questi adunque semplici danari 1984, si veda quante braccia semplici, e quanti soldi importino; ogni braccio avendone 240, se ne troveranno ivi braccia 8, che importano danari 1920, e ne rimangono 64, e questi divisi per 12, che compongono il soldo, se ne trovano soldi 5 (che fanno 60 danari, e ne restano danari 4; dunque la superficie composta di braccia quadre 60, e soldi quadri 248, e danari superficiali 128, divisa per uno de' suoi lati cioè per braccia 7 soldi 6 e danari 8 di lunghezza, ci da l'altro lato di braccia semplici 8, soldi 5, e danari 4, che tale è la divisione fatta esattamente con questo metodo, come in fatti si vedrà moltiplicando le braccia 7, soldi 6, e danari 8, in braccia 8 soldi 5 e danari 4, dal che ne riuscirebbero appunto braccia quadre 60, e soldi quadri 248 con danari superficiali 128, imperocchè si è veduto essere le braccia 7 soldi 6 e danari 8 il numero de danari 1760, poscia le braccia 8 soldi 5 e danari 4, la somma di danari 1984, onde poi moltiplicando 1984 per

1680
72
8
1760

1920
60
4
1984

1760 (1760 via 4 fa 7040, lo stesso via 80 fa 140800, il medesimo per 900 è 1584000, ed esso per 1000 fa 1760000) ne proviene 3491840, qual somma abbiamo veduto, che corrisponde appunto a quella de' danari superficiali di 60 braccia quadre, di soldi 248, e di danari 128; onde è ben fatta la divisione, corrispondendo a tale moltiplicazione.

7040
140800
1584000
1760000
3491840

Se poi nel dividere la somma di quei danari superficiali, con l' altra somma de' semplici vi avanzasse qualche altro numero, gli si aggiungerebbe la frazione del numero residuo, denominata dal divisore, come si è detto di sopra. Per esempio essendo la superficie 3 braccia quadre, soldi 4 quadri, e danari superficiali 24, dividendola per un lato di braccia 1 soldi 13, e 4 danari semplici, le 3 braccia quadre saranno di danari superficiali 172800 (essendo ogni braccio di 57600 danari, il cui triplo è il numero sopra addotto) li 4 soldi saranno danari 576 (avendone ognuno 144, che quadruplicato fa il suddetto numero) però agiunti li danari 24 si ha la somma di danari superficiali 173400. E quanto alle braccia di lunghezza, che è un solo, conterrà danari semplici 240, e li soldi 13 avendo ciascuno danari 12, ne importeranno 156, ed aggiunti li 4 danari fanno in tutto 400, però dividendo il numero 173400 per 400, cioè tolti di quà, e di là li due zeri, basta divi-

172800
576
24
173400

240
156
4
400

videre 1734 per 4, anzi diviso l'uno, e l'altro per 2, si dividerà il numero 867 per 2, dal che ne risulta 433 $\frac{1}{2}$, onde levati 240 si ha un braccio di lunghezza, e rimangono danari 193 $\frac{1}{2}$, de' quali vi saranno soldi 16; perchè ogni soldo avendo 12 danari, ne provengono alli 16 soldi i danari 192, onde rimane, semplici danari 1 $\frac{1}{2}$; sicchè l'altro di tale superficie divisa, dovrà essere braccia 1, soldi 16, e danari 1 $\frac{1}{2}$; il che dovea ritrovarsi per questa divisione.

E può ancora osservarsi l'esattezza della medesima divisione, se viceversa moltiplicando il quoziente col divisore, ne risulterà la stessa quantità, che fù proposta a dividersi; come moltiplicando braccia 1 soldi 16 danari 1 $\frac{1}{2}$, per braccia 1. soldi 13, e danari 4, ne risulteranno braccia quadre 3 soldi 4, e danari superficiali 24, che erano dati a dividersi; imperocchè nel quoziente sono danari 433 $\frac{1}{2}$, e nel divisore danari 400, e questi prodotti in quelli fanno appunto danari superficiali 173400, che si è veduto essere nella quantità proposta a dividersi.

Anzi vi è il medesimo eccesso di 9 tanto nel 173400, che è 6 (perchè 4 e 3 fa 7, ed altri 7 fanno 14, e con l'unità 15, ed è il 5 con l'1 uguale a 6) quanto nel prodotto di 433 $\frac{1}{2}$ in 400, perchè il 4 con li due 3 fa 10, che è 1, ed il 4 preso dal 400 moltiplicato in 1 $\frac{1}{2}$, fa 4, e 2, che sono pure uguali a 6, come nell' altro prodotto.

CA-

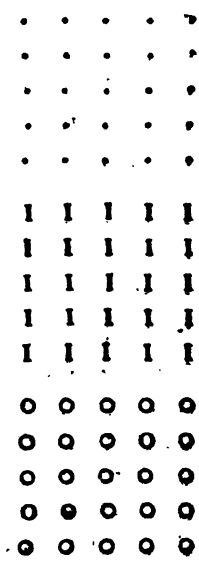
CAPITOLO IX.

Del cavare la radice quadra d' un numero.

QUando ſi moltiplica un numero per ſe ſteſſo, il prodotto diceſi *Quadrato*, perchè può diſporſi con le ſue unità in forma perfettamente quadra, cioè con i lati compoſti del medeſimo numero. Così il 25 è numero quadrato, riſultando dal 5 moliplicato in ſe ſteſſo, ed eſſo 5 diceſi la radice quadra del medeſimo quadrato 25; onde può diſporſi in figura quadra, di cui ciaſcun lato ſia compoſto di cinque punti (ſe tutti gli altri ſono punti) o di cinque unità, o di cinque cifre (eſſendo l' altre di mezzo parimente unità, o parimente cifre) come nelle figure quì addotte, che ne compongono 25 punti, o 25 unità, o 25 zeri, col lato di 5, che ne è la radice; onde il cercare la radice quadra di un numero propoſto è lo ſteſſo, che voler ritrovare qual ſia quel numero, che moltiplicato in ſe ſteſſo farebbe appunto quel tale numero propoſto.

. . . . .
. . . . .
. . . . .
. . . . .
. . . . .

1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1

0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0

Non può eſſere però la radice quadra di qualunque numero, ma ſolamente de' numeri quadrati; ad ogni modo ſe il propoſto numero non è veramente quadrato, ſe ne può cercare una proſſima radice, non però eſatta, ma tale, che moltiplicata in ſe ſteſſa fa un numero alquanto proſ-

ſimo

ſimo a quello, di cui cercavaſi la radice, che mai non può eſſere preciſa, benchè accreſciuta, o diſtratta da qualſivoglia frazione.

Primieramente convien ſapere, quali ſiano i numeri veramente quadrati, che corriſpondono alle prime note numeriche, perchè da queſti ſi cava lume per ritrovare la radice quadra, eſatta, o proſſima di qualunque altro numero maggiore; ſi oſſervi però queſta prima ſerie delle radici, e de' loro quadrati nella preſente Tavola.

Radici	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Propoſto quindi un numero, di cui ſi vuole cavare la radice quadra, primieramente ſi punteggi quel numero, cominciando dall'ultima nota della parte deſtra, e procedendo verſo la ſiniſtra punteggiandole non tutte, ma alternativamente, cioè una sì, ed una nò, e quanti punti in eſſo numero riuſciranno eſſere notati, tante note dovrà avere la radice quadra, che vi ſi cerca.

Quindi ſi eſamini dalla ſiniſtra il primo punto, che comprenderà una ſola nota, o pure due inſieme, e ſi riguardi quale ſia il maſſimo quadrato di quelli della Tavoletta antecedente, che incluſo ſi ritrovi in detto punto, e ſe vi ha qualche eceſſo, ſi noti ſotto, e dietro alla lunetta ſcrivaſi la radice del quadrato, che ivi fù ritrovato.

Queſta

Queſta ſteſſa radice poi ſi raddoppj, e con eſſa così raddoppiata ſi divida il numero compoſto da queſt' ecceſſo notato di ſotto, e dalla ſuſſeguente proſſima nota non punteggiata nel propoſto numero, ed il quoziente ſi ſcriva dietro la lunetta appreſſo la prima nota ivi poſta. Quindi unito lo ſteſſo quoziente colla ſeconda nota ritrovata, ſi moltiplichi tutto queſto compleſſo per il medeſimo quoziente, ſottraendone il prodotto dalle note propoſte nel numero fino al ſecondo punto, notandovi ſotto l'ecceſſo, che forſe vi avanzaſſe.

Al medeſimo modo ſi cercherà la terza nota della radice, ſimilmente raddoppiando le due note già trovate; per cui ſi divida il numero compoſto dell' ultimo ecceſſo, e della proſſima nota nel numero propoſto; ed il quoziente ſcrivaſi pure dietro la lunetta, appreſſo le due precedenti note, ed anche ſcrivaſi appreſſo al detto diviſore, moltiplicando tutto ciò, che ne riſulta per lo ſteſſo quoziente, e ſottraendo il prodotto dalle note del numero propoſto continuate fino al terzo punto, e così facendo di mano in mano, ſino che all' ultimo, fatta la ſottrazione, nulla rimangavi d' ecceſſo, il che ſuccederà ogni qualvolta il propoſto numero ſia veramente quadrato; ma ſe tale non foſſe, ci ſarebbe l'ultimo avanzo, di cui dovrebbe farſi una frazione denominata dal doppio dell' intera radice fino allora trovata, per averne una radice proſſima alla vera compoſta di quelle note radicali ritrovate, e di tale frazione; il che potrà baſtare, non potendoſi averne la radice preciſa.

Si deve però avvertire primieramente, che ſe il diviſore non entraſſe pure una volta in quel numero che occorre dividere, doverà notarſi uno zero nella radice, e tirare avanti l' operazione. Secondariamente ſe lo ſteſſo diviſore entraſſe più di nove volte nel numero, che occorre dividerſi, non ſi potrà notare giammai per quoziente verun numero maggiore di 9; ma queſto ſolo, facendovi rimanere nell' eccesſo ancora tutto ciò, che ha più di nove volte in ſe il detto quoziente. In terzo luogo ſi avverta, che ſe fatta la moltiplicazione come ſopra, il prodotto riuſciſſe maggiore del numero da cui doveva ſottrarſi, allora biſognerà ſcrivere per quoziente un numero proſſimamente minore, ma queſte regole meglio ſi ſchiariranno con alcuni eſempj.

5̣9ọ4ạ9̣	(243
4	
190	44 - 4
176	176
1449	
1449	483 - 3
0000	1449

Sia propoſto il numero 59049, da cui ſi deſideri cavare la radice quadra. Punteggiſi l' ultima nota 9, e laſciata ſenza punto la penultima 4, ſi punteggi il zero antecedente, e parimente laſciato il 9, che ci è avanti, ſi faccia il punto al precedente 5. Poſcia ſi eſamini eſſo 5 corriſpondente al primo punto, e ſi vegga quale è il quadrato

drato contenuto in esso, che si troverà essere 4, la cui radice è 2, però questa radice scrivasi appresso la lunetta, ed avanzando nel 5 l'unità sopra il 4, aggiuntavi la seconda nota 9 si ha 19; il che dividendosi pel doppio della radice 2, cioè per 4, ne riesce altresì 4, essendo esso quattro volte nel 19; però nella lunetta dopo il 2 scrivasi il 4; indi scritto da parte il 4 divisore, e postovi allato l'altro 4 quoziente, si averà 44, il quale moltiplicato per lo stesso 4 quoziente diviene 176, e questo sottratto dalle tre note 190 (aggiunto al 19 il zero seguente) rimane l'eccesso 14, cui aggiunta la seguente nota 4, si fa 144, e questo deve dividersi per il doppio delle due note radicali 24, che saranno 48, e diviso quel 144 per 48, si trova essere per l' appunto il 3, onde si scrive nella lunetta la terza nota 3, e scritto da parte il 48 divisore, e messovi allato il tre quoziente, si averà 483, il quale moltiplicandosi per lo stesso 3 quoziente, diviene 1449, ed essendo ancora quel numero 144 con la seguente nota 9 ultima del proposto numero, uguale allo stesso 1449, sottratto questo da quello, nulla vi rimane, e però il numero 243 dovrà essere la vera radice quadra del proposto numero 59049. Il che dovea ritrovarsi.

28515̇6̇

285156	(534
25	
351	103 - 3
309	309
4256	
4256	1064 - 4
0000	4256

Dato parimente il numero 285156, volendo trovarne la radice quadra, ſi punteggiano li numeri 6, 1, e 8; indi cominciando dal 28 a conſiderare qual numero quadrato ſia in eſſo ſi trova eſsere 25, la cui radice è 5, quale però ſcriveſi appreſso la lunetta, ed avanzando 3 nel 28, ſi ſcrive il 3 con la nota ſeguente 5 di eſso, che fa 35, e queſto deve dividerſi per 10, che è il doppio della nota radicale 5, e comprendendoſi eſso 10 tre volte nel 35, perciò nella lunetta ſcriveſi in ſecondo luogo il 3, e congiunto il 3 al diviſore 10, che fa 103, ſi moltiplica per 3, e diviene 309; il che levandoſi dal 351 (aggiunta al 35 la ſeguente nota 1 del propoſto numero), ne avanza 42, cui aggiunta la ſeguente nota 5 del numero dato, ſi ha 425, che diviſo per il doppio delle due note radicali 53, cioè per 106, ci ſi ritrova compreſo 4 volte, però alla lunetta ſi aggiunge il 4, ed ancora ſi aggiunge al 106, onde rieſce 1064, che moltiplicandoſi per 4 da 4256, il che è lo ſteſso col reſto del propoſto numero, aggiungendo al 425 l'ultima nota 6; però del dato numero 285156 la vera radice è 534 ritrovata con queſto metodo.

546820

546820	739 (699 / 1478)
49	
568	143 - 3
429	429
13920	
13221	1469 - 9
699	13221

Ecco un altro esempio, in cui si troverà la radice prossima, e non precisa. Sia il numero dato 546820. Avendolo punteggiato, si cerchi il massimo quadrato nelle prime note 54, che sarà 49, la cui radice è 7, che si scriverà dentro la lunetta, e sottraendo 49 da 54 rimane l'avanzo 5, cui aggiunta la seguente nota 6, sarà 56, da dividersi pel doppio di 7, cioè per 14, il che vi entrerebbe 4 volte perappunto, ma perchè se alli 14 ci si aggiungesse il 4, verrebbe 144, il quale moltiplicato per 4 riuscirebbe 576, che non potrebbe sottrarsi dal 568 (aggiunta al 56 l'altra nota 8 del proposto numero) perciò si scriva solamente il 3 in vece di 4, come nella terza regola fù avvisato, onde nella lunetta si aggiungerà il 3, e questo pure aggiunto al 14, si averà 143, che moltiplicato per 3, ci darà 429, e questo sottratto da 568 ne rimarrà 139, cui aggiunta l'altra nota del proposto numero, che è 2 (dopo l'8 al 56 aggiunto) sarà 1392, il che diviso col doppio di 73, cioè per 146, si vede, che ci entra 9 volte, onde si aggiunge 9 all'altre due note della lunetta; ed aggiunto ancora al medesimo divisore, riesce 1469, che moltiplicato per 9 di-

venta 13221, che dal 13920 (aggiunta l'ultima nota zero del propoſto numero al 1392) ſottraendoſi, vi rimane per reſiduo 699, di cui ſi fa una frazione denominata dal doppio delle radici trovate 739, che ſarà 1478; cioè tale frazione riuſcirà $\frac{699}{1478}$ da aggiungerſi alla ſuddetta radice 739; ſarà però tale radice con quella frazione alquanto maggiore della vera, e ſe il denominatore di quella frazione ſi augumentaſſe d'una unità, facendo $\frac{699}{1479}$, riuſcirebbe alquanto minore della radice vera (ſebbene tale frazione potrebbe ridurſi a $\frac{233}{493}$, dividendo per tre l'uno e l'altro numero, il ſuperiore, e l'inferiore) onde la vera radice di 546820, che non ſi puo ritrovare eſpreſſa in note numerali, ſarà di mezzo tra il 739 $\frac{699}{1478}$, e 739 $\frac{699}{1479}$; o pure dicaſi tra il 739 $\frac{233}{492}$, ed il 739 $\frac{233}{493}$, delle quali una è alquanto maggiore, l'altra alquanto minore della ſua eſatta radice, che preciſamente non può eſprimerſi, per non eſſere quel numero un vero quadrato.

Anzi per accoſtarſi meglio in infinito (per quanto ſi voglia) alla radice preciſa, ſi potrebbe continuare l'operazione, aggiungendo all'ultimo avanzo 699, due, o quattro, o ſei zeri, o quanti ſi voleſſe di numero pari; e continuando l'operazione come ſopra, ſi troverebbero altre, ed altre note da aggiungerſi alla radice per numeratori di un altra frazione, che ſarà decimale per il deno-

mi-

minatore, in cui sarà l' unità con tanti zeri, quante fossero le note ultimamente ritrovate, o pure dicasi, quante erano le coppie delle cifre aggiunte all' ultimo avanzo.

Per esempio, aggiungendo al 699 quattro coppie di zeri, si farà 6990000000, e continuando l' operazione si troverebbe da aggiungere alla radice delle note già determinate 739 queste altre quattro note 4728 denominate da 10000, cioè la frazione $\frac{4728}{10000}$ per cagione delle quattro coppie di zeri aggiunti al detto avanzo, il che si vede potersi continuare similmente in infinito; e detta radice, benchè maggiore alquanto della radice 739, è però minore della già trovata di sopra $739\frac{699}{1478}$, e maggiore dell' altra $739\frac{699}{1479}$, onde più si accosta alla radice esatta del proposto numero. Anzi quella frazione $\frac{4728}{10000}$ potrebbe ridursi in minori termini, dividendosi per 8 il numeratore, ed il denominatore, onde essa frazione si esprimerebbe per $\frac{591}{1250}$, che è uguale alla precedente $\frac{4728}{10000}$; e però la radice alquanto maggiore della precisa, sarà $739\frac{591}{1250}$, e la radice alquanto minore sarebbe $739\frac{591}{1251}$, anzi $739\frac{197}{417}$ uguale all' altra, dividendosi per 3 tanto il numeratore, quanto il denominatore di essi.

Sarà bene poi osservare, come si comprenda la se-

ſerie di tutti i quadrati per mezzo de' numeri diſpari 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 &c. mentre 1 è il quadrato dell' unità, cui ſi aggiunga il 3 ne rieſce 4, che è quadrato di 2; ed aggiuntovi pure 5, ſi fa 9 quadrato di 3, e ſimilmente al 9 aggiunto il 7, ſi fa 16 quadrato di 4, e così proſeguendo, ſi fanno tutti i quadrati coll' aggiunta de' proſſimi diſpari, come può vederſi nella ſeguente Tavola, in cui ſono le Radici, ed i loro Quadrati, e le Differenze di eſſi, che ſono i numeri diſpari, che aggiunti al proſſimo quadrato, ne fanno il ſeguente di mano in mano.

Tavola de' Quadrati.

Radici.	*Quadrati.*	*Differenze.*	*Radici,*	*Quadrati,*	*Differenze.*
1	1	1	19	361	37
2	4	3	20	400	39
3	9	5	21	441	41
4	16	7	22	484	43
5	25	9	23	529	45
6	36	11	24	576	47
7	49	13	25	625	49
8	64	15	26	676	51
9	81	17	27	729	53
10	100	19	28	784	55
11	121	21	29	841	57
12	144	23	30	900	59
13	169	25	31	961	61
14	196	27	32	1024	63
15	225	29	33	1089	65
16	256	31	34	1156	67
17	289	33	35	1225	69
18	324	35	36	1296	71

Ra-

Radici.	Quadrati.	Differenze.	Radici.	Quadrati.	Differenze.
37	1369	73	69	4761	137
38	1444	75	70	4900	139
39	1521	77	71	5041	141
40	1600	79	72	5184	143
41	1681	81	73	5329	145
42	1764	83	74	5476	147
43	1849	85	75	5625	149
44	1936	87	76	5776	151
45	2025	89	77	5929	153
46	2116	91	78	6084	155
47	2209	93	79	6241	157
48	2304	95	80	6400	159
49	2401	97	81	6561	161
50	2500	99	82	6724	163
51	2601	101	83	6889	165
52	2704	103	84	7056	167
53	2809	105	85	7225	169
54	2916	107	86	7396	171
55	3025	109	87	7569	173
56	3136	111	88	7744	175
57	3249	113	89	7921	177
58	3364	115	90	8100	179
59	3481	117	91	8281	181
60	3600	119	92	8464	183
61	3721	121	93	8649	185
62	3844	123	94	8836	187
63	3969	125	95	9025	189
64	4096	127	96	9216	191
65	4225	129	97	9409	193
66	4356	131	98	9604	195
67	4489	133	99	9801	197
68	4624	135	100	10000	199

&c.

E così pure gli altri potrebbero ſimilmente diſporſi, ma parmi ſia bene oſservare ancora, quali ſiano i quadrati de' numeri composti con qualche frazione, e quali ſiano le loro differenze, ſe ſi prendono le loro radici aritmeticamente creſcenti. Ne porterò quì alcune Tavole, che ſarà bene il vederle, delle quali niun altro Autore ne ha diſcorſo.

Tavola de' Quadrati de' numeri, con alcune frazioni aggiunte.

Radici.	Quadrati.	Differenze.
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	4
$2\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	6
$3\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	8
$4\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{4}$	10
$5\frac{1}{2}$	$30\frac{1}{4}$	12
$6\frac{1}{2}$	$42\frac{1}{4}$	14

Radici.	Quadrati.	Differenze.
$7\frac{1}{2}$	$56\frac{1}{4}$	16
$8\frac{1}{2}$	$72\frac{1}{4}$	18
$9\frac{1}{2}$	$90\frac{1}{4}$	20
$10\frac{1}{2}$	$110\frac{1}{4}$	22
$11\frac{1}{2}$	$132\frac{1}{4}$	24
$12\frac{1}{2}$	$156\frac{1}{4}$	
&c.	&c.	&c.

Ra-

Radici.	Quadrati.	Differenze.
1 1/3	1 7/9	3 2/3
2 1/3	5 4/9	5 2/3
3 1/3	11 1/9	7 2/3
4 1/3	18 7/9	9 2/3
5 1/3	28 4/9	11 2/3
6 1/3	40 1/9	13 2/3
7 1/3	53 7/9	15 2/3
8 1/3	69 4/9	17 2/3
9 1/3	87 1/9	19 2/3
10 1/3	106 7/9	21 2/3
11 1/3	128 4/9	23 2/3
12 1/3	152 1/9	
&c.	&c.	&c.

Radici.	Quadrati.	Differenze.
1 1/4	1 9/16	3 1/2
2 1/4	5 1/16	5 1/2
3 1/4	10 9/16	7 1/2
4 1/4	18 1/16	9 1/2
5 1/4	27 9/16	11 1/2
6 1/4	39 1/16	13 1/2
7 1/4	52 9/16	15 1/2
8 1/4	68 1/16	17 1/2
9 1/4	85 9/16	19 1/2
10 1/4	105 1/16	21 1/2
11 1/4	126 9/16	23 1/2
12 1/4	150 1/16	
&c.	&c.	&c.

Radici.	Quadrati.	Differenze.
1 1/5	1 11/25	3 2/5
2 1/5	4 21/25	5 2/5
3 1/5	10 6/25	7 2/5
4 1/5	17 16/25	9 2/5
5 1/5	27 1/25	11 2/5
6 1/5	38 11/25	13 2/5

Radici.	Quadrati.	Differenze.
7 1/5	51 21/25	15 2/5
8 1/5	67 6/25	17 2/5
9 1/5	84 16/25	19 2/5
10 1/5	104 1/25	21 2/5
11 1/5	125 11/25	23 2/5
12 1/5	148 21/25	
&c.	&c.	&c.

Ra-

Radici.	Quadrati,	Differenze.	Radici,	Quadrati.	Differenze.
1 $\frac{1}{6}$	1 $\frac{13}{36}$	3 $\frac{1}{3}$	7 $\frac{1}{6}$	51 $\frac{13}{36}$	15 $\frac{1}{3}$
2 $\frac{1}{6}$	4 $\frac{25}{36}$	5 $\frac{1}{3}$	8 $\frac{1}{6}$	66 $\frac{25}{36}$	17 $\frac{1}{3}$
3 $\frac{1}{6}$	10 $\frac{1}{36}$	7 $\frac{1}{3}$	9 $\frac{1}{6}$	84 $\frac{1}{36}$	19 $\frac{1}{3}$
4 $\frac{1}{6}$	17 $\frac{13}{36}$	9 $\frac{1}{3}$	10 $\frac{1}{6}$	103 $\frac{13}{36}$	21 $\frac{1}{3}$
5 $\frac{1}{6}$	26 $\frac{25}{36}$	11 $\frac{1}{3}$	11 $\frac{1}{6}$	124 $\frac{25}{36}$	23 $\frac{1}{3}$
6 $\frac{1}{6}$	38 $\frac{1}{36}$	13 $\frac{1}{3}$	12 $\frac{1}{6}$	148 $\frac{1}{36}$	
			&c.	&c.	&c.

E così facilmente si potranno fare gli altri quadrati, le cui radici numeriche siano composte di altre frazioni, e le cui differenze possano competerci. In quest' ultima tavola, la radice 2 $\frac{1}{6}$, facendosi del quadrato 4 $\frac{25}{36}$, mostra che tale suo quadrato è uguale al quadrato di 2 (che è 4) ed al quadrato della frazione $\frac{5}{6}$ (il cui quadrato è pure $\frac{25}{36}$) il che ho gusto si osservi.

CAPITOLO X.

Del cavare la Radice cubica di un numero.

MOltiplicandosi qualunque quadrato per la sua radice quadra, ne riesce il *Cubo*, di cui quella stessa radice dirassi *Cubica*; però si cerca, come possa trovarsi la cubica radice di qualsivoglia numero proposto, il quale se non è propriamente cubo, non potrà avere una esatta radice cubica; ma solamente qualcheduna alquanto prossima, con una frazione aggiuntavi. Conviene però os-

osservare i cubi delle prime note numeriche nella seguente Tavola, in cui sono posti ancora i loro quadrati.

Radici.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrati.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubi.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Nel dato numero da cavarsi la radice cubica si punteggia l' ultima nota, e procedendo avanti verso la sinistra, si lasciano due note libere, e l' altra si punteggia, indi se vi sono altre due note, si lasciano libere, e l' altra punteggiasi, e così sempre. Per esempio sia proposto il numero 82312875. Si punteggia l' ultima nota 5, e passate l'altre due precedenti 7, e 8, si fa il punto sotto il 2, e passate l' altre due note 1 e 3, si punteggia la seguente nota, che pure è un 2, come si vede nella seguente dimostrazione.

Quì la lettera *R* significa la Radice.
La lettera *Q* il Quadrato.
La lettera *C.* il Cubo.
Il segno X tra due numeri, importa la moltiplicazione di uno nell' altro.
Il segno = mostra l' ugualità de prodotti di quei numeri nell' altro.
Il segno + importa la somma.

82312875

82312875	(435
64	
183	R. 4
144	Q. 16
3912	C. 64
1107	
28058	4X4=16X3=48
27735	
32375	3X3=9X3=27X4=1080+27=1107
32375	
00000	43X43=1849X3=5547

5X5=25X3=75X43=32250+125=32375

Indi si considerino le prime note al punto verso sinistra, cioè 82, e si cerchi il massimo cubo ivi compreso, che sarebbe 64, onde la sua radice cubica 4 si scriva dopo la lunetta, e sottratto il 64 da 82, vi rimane 18, a cui aggiunta la seguente nota 3 del numero proposto, ne risulta 183, cui deve compararsi il triplo del quadrato di quella radice 4, il cui quadrato essendo 16, triplicato si fa 48, e si considera quante volte questo si contenga in quello 183, e trovandosi, che ci stia tre volte, che sarebbe 144, però nella lunula scrivasi la stessa nota 3 appresso l'altra 4, indi preso l'eccesso di 183 sopra il 144, che è 39, vi si aggiungano l'altre due note 12 del proposto numero, onde riuscirà 3912. Quindi preso il quadrato della seconda radicale nota 3, che è 9 si triplichi, che diven-

venterà 27, e ciò si moltiplichi per l' antecedente nota radicale 4, che si farà 108, e gli si aggiunga uno zero, sicchè diventi 1080, indi preso il cubo di quella nota 3, che pure è 27, sommato questo con quello, diventa 1107; e cio si sottragga dal numero superiore 3912, e ci resta 2805, cui poscia aggiungasi la nota 8 del proposto numero, che diventerà 28058 (se però fosse riuscito maggiore quel numero 1107 dell' altro 3912, onde non si fosse potuto sottrarre quello da questo, come si vedrà in un altro esempio, si sarebbe dovuta diminuire la seconda nota radicale, computando in quel primo eccesso il triplo del quadrato della prima nota radicale, come ci si contenesse meno volte). Quindi quadrando il numero delle due note radicali 43, che sarà 1849, e triplicandolo, che riuscirà 5547, partasi da questo quel numero 28058, e si vedrà entrarci cinque volte, perchè moltiplicato quello per 5 diventa 27735, perciò segnasi la nota 5 nella lunula al terzo luogo; e sottratto 27735 da 28058, ne rimane 323, cui si aggiungano l' altre due note 75 del proposto numero, e diventerà l' avanzo 32375, indi preso il quadrato di quella terza nota 5, che è il 25, e triplicatolo, si fa 75, e moltiplicato per le altre antecedenti note radicali 43, diventa 3225, a cui si aggiunga un zero, e sarà 32250; e preso poi il cubo della medesima nota 5, che è 125, si faccia insieme la somma di questo, e di quello, e diventerà quindi 32375; il che essendo uguale a quell' ultimo suo avanzo, è manifesto essere 435 la precisa Radice cubica del proposto numero 82312875.

Ma

Ma ſe queſto avanzo foſſe ritrovato minore di quella ſomma, ſi dovrebbe diminuire la nota ultimamente trovata (come ſi è detto di ſopra) ſe poi foſſe maggiore il ſuo eceſſo, ſi ſarebbe numeratore di una frazione denominata da un numero triplo della ſomma della trovata radice, e del ſuo quadrato, la quale frazione inſieme con eſſa radice ſarebbe proſſimamente maggiore, o minore della vera; e quando il propoſto numero ſi accreſceſſe con triplicati zeri, gli ſi aggiungerebbe un altra frazione, col denominatore della radice cubica di que' milleſimi aggiunti, come al di ſotto potrà darſene l' eſempio.

```
5 2 6 5 8          ( 3 7  2005
  ·     ·                 ----
                          4218
2 7
-----
2 5 6
1 8 9              3X3 = 9X3 = 27
-----
  6 7 5 8          7X7 = 49X3 = 147X3 = 4410 + 343 = 4753
  4 7 5 3
  -------
  2 0 0 5          37X3 = 111
                   37X37 = 1369X3 = 4107
                   111 + 4107 = 4218
```

Eſſendoſi però dato il numero 52658, di cui ſi cerchi la radice cubica, punteggiatolo nelle note 8, e 2, ſi cercherà il maſſimo cubo nelle prime note 52, che ſi vedrà eſſere il 27, la cui radice cubica è il 3, la quale ſcrivaſi dopo la lunetta;

ta; e sottratto il 27 da 52, rimane 25, cui aggiunta la prossima nota 6, ne riesce 256, in cui osservando, quante volte ci entri il triplo di 9 quadrato di 3, che sarà pure 27, si trova, che ci entrerebbe 9 volte, facendo 243; ma questo è troppo, perchè fatto l'altro calcolo, sarebbe il seguente eccesso minore di esso; ed ancora entrandovi 8 volte nel 256 sarebbe ancora troppo; però si pigli 7 volte, che fa 189, il che da 256 levato, ne rimane 67, cui si aggiungano l'altre due note, e diventerà 6758; indi posta essa nota 7 nella lunetta, il suo quadrato 49 si triplichi, e sarà 147, e moltiplicato per la prima nota radicale 3, riesce 441, cui aggiunto uno zero si fa 4410, ed aggiuntovi il cubo di 7, che è 343, si ha 4753, e questo sottratto da quell' avanzo 6758, ne rimane 2005, il che si ponga appresso le radici cubiche 37 per numeratore della frazione, cui sottopongasi per denominatore il triplo della radice trovata, e del suo quadrato; onde essendo il triplo di 37 questo numero 111, ed il di lui quadrato 1369, triplicato diviene 4107, l'uno e l'altro farà 4218, che sarà il denominatore della frazione; sicchè la prossima radice (ma però alquanto minore della vera rispetto al proposto numero 52658, sarà $37\frac{2005}{4218}$; il che dovea determinarsi.

Più esattamente però si troverebbe la frazione da aggiungersi alla radice ritrovata, se al numero dato si aggiungessero alquanti tripli di zero, e seguitando il calcolo si troverebbero altre note radicali, che prese per numeratore, gli si sottoporrebbe per denominatore l'unità, con la terza

parte degli zeri, che si erano aggiunti al proposto numero. Come per esempio essendovi il numero 29160, aggiuntivi due ternarj di zero, si troverà la radice di tutto quel numero 3077, e perchè sempre sono tante note radicali, quanti sono li punti addottivi, essendo però solamente due al primo numero proposto, si pigliano le prime due note radicali 30, e l'altre due seguenti, per gli zeri aggiunti, lascianfi per numeratore 77 della frazione, che averà poi per denominatore l'unità, con due zeri aggiuntivi; sicchè la più prossima radice cubica di 29160 sarà $30\frac{77}{100}$ alquanto però minore della sua precisa; ed accrescendo di una unità esso numeratore, cioè facendo $30\frac{78}{100}$ riuscirebbe prossimamente maggiore della sua esatta radice cubica, la quale non si può mai esprimere precisamente con le note numeriche, ma secondo che si aggiungano al dato numero più tripli di zero, si farà la radice sempre più prossima alla sua precisa.

29160000000 (3077
29160

$30\frac{77}{100}$

Bisogna finalmente osservare, come la serie de' Cubi si comprenda pure da' numeri dispari, ma con la somma di tanti, quante sono le unità di sua radice cubica, cioè in questa maniera; il primo cubo di 1 è pure 1, il cubo secondo, la cui radice è 2, si comprende dalli due susseguenti numeri dispari 3 e 5, che fanno il cubo 8, il terzo cubo della radice 3 si compone pure dalli tre seguenti dispari, che sono 7, 9, ed 11, li quali fanno il cubo 27, e così altri quattro dispari 13, 15, 17,

e 19

e 19 fanno il quarto cubo 64, la cui radice è 4, e così susseguentemente, come può vedersi in questa Tavola di poche radici e cubi addotta, ma che si potrebbe in oltre continuare nella stessa maniera.

Radici.	*Cubi.*	*Dispari, uguali al Cubo.*
1	1	1
2	8	3 5
3	27	7 9 11
4	64	13 15 17 19
5	125	21 23 25 27 29
6	216	31 33 35 37 39 41
7	343	43 45 47 49 51 53 55
&c.	&c.	&c.

Ne aggiungerò un altra alquanto maggiore, in cui si vede, oltre le radici ed i cubi, le loro due differenze, delle quali l'ultima è composta di numeri aritmetici, la cui differenza è sempre il sei; onde è fatta di 6, 12, 18, 24, 30 &c.

Radici.	*Cubi.*	*Differenza 1.*	*Differenza 2.*
0	0		
		1	
1	1		6
		7	
2	8		12
		19	
3	27		18
		37	
4	64		24
		61	
5	125		30

Radici.	*Cubi.*	*Differenza 1.*	*Differenza 2.*
6	216	91	36
7	343	127	42
8	512	169	48
9	729	217	54
10	1000	271	60
11	1331	331	66
12	1728	397	72
13	2197	469	78
14	2744	547	84
15	3375	631	90
16	4096	721	96
17	4913	817	102
18	5832	919	108
19	6859	1027	114
20	8000	1141	120
21	9261	1261	126
22	10648	1387	132
23	12167	1519	138
		1657	

Radici.	Cubi.	Differenza 1.	Differenza 2.
24	13824		144
		1801	
25	15625		150
		1951	
26	17576		156
		2107	
27	19683		162
		2269	
28	21952		168
		2437	
29	24389		174
		2611	
30	27000		180
		2791	
31	29791		186
		2977	
32	32768		192
		3169	
33	35937		198
		3367	
34	39304		204
		3571	
35	42875		210
		3781	
36	46656		216
		3997	
37	50653		222
		4219	
38	54872		228
		4447	
39	59319		234
		4681	
40	64000		240
		4921	
41	68921		246
		5167	

Radici.	Quadrati.	Differenza 1.	Differenza 2.
78	474552	18487	468
79	493039	18961	474
80	512000	19441	480
81	531441	19927	486
82	551368	20419	492
83	571787	20917	498
84	592704	21421	504
85	614125	21931	510
86	636056	22447	516
87	658503	22969	522
88	681472	23497	528
89	704969	24031	534
90	729000	24571	540
91	753571	25117	546
92	778688	25669	552
93	804357	26227	558
94	830584	26791	564
95	857375	27361	5

Radici.	*Quadrati.*	*Differenza* 1.	*Differenza* 2.
96	884736		576
		27937	
97	912673		582
		28519	
98	941192		588
		29107	
99	970299		594
		29701	
100	1000000		600
&c.	&c.	&c.	&c.

Ancora le radici si pigliano aritmeticamente, ma congiuntavi una stessa frazione, i Cubi di esse parimente hanno le due differenze, di cui le seconde parimente tra loro differiscono dello stesso numero 6, come si vedrà nelle seguenti brevi Tavole.

Ra-

Radici.	*Cubi.*	*Differenze prime.*	*Differenze seconde.*	*Differenze ultime.*
1 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{3}{8}$			
		12 $\frac{1}{4}$		
2 $\frac{1}{2}$	15 $\frac{5}{8}$		15	
		27 $\frac{1}{4}$		6
3 $\frac{1}{2}$	42 $\frac{7}{8}$		21	
		48 $\frac{1}{4}$		6
4 $\frac{1}{2}$	91 $\frac{1}{8}$		27	
		75 $\frac{1}{4}$		6
5 $\frac{1}{2}$	166 $\frac{3}{8}$		33	
		108 $\frac{1}{4}$		6
6 $\frac{1}{2}$	274 $\frac{5}{8}$		39	
		147 $\frac{1}{4}$		6
7 $\frac{1}{2}$	421 $\frac{7}{8}$		45	
		192 $\frac{1}{4}$		6
8 $\frac{1}{2}$	614 $\frac{1}{8}$		51	
		243 $\frac{1}{4}$		6
9 $\frac{1}{2}$	857 $\frac{3}{8}$		57	
		300 $\frac{1}{4}$		
10 $\frac{1}{2}$	1157 $\frac{5}{8}$			
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Ra-

Radici.	*Cubi.*	*Differenze prime.*	*Differenze seconde.*	*Differenze ultime.*
$1 \frac{1}{3}$	$2 \frac{10}{27}$	$10 \frac{1}{3}$	14	6
$2 \frac{1}{3}$	$12 \frac{19}{27}$	$24 \frac{1}{3}$	20	6
$3 \frac{1}{3}$	$37 \frac{1}{27}$	$44 \frac{1}{3}$	26	6
$4 \frac{1}{3}$	$81 \frac{10}{27}$	$70 \frac{1}{3}$	32	6
$5 \frac{1}{3}$	15[illegible] $\frac{19}{27}$	$102 \frac{1}{3}$	38	6
$6 \frac{1}{3}$	$254 \frac{1}{27}$	$140 \frac{1}{3}$	44	6
$7 \frac{1}{3}$	$394 \frac{10}{27}$	$184 \frac{1}{3}$	50	6
$8 \frac{1}{3}$	$578 \frac{19}{27}$	$234 \frac{1}{3}$	56	6
$9 \frac{1}{3}$	$813 \frac{1}{27}$	$290 \frac{1}{3}$		
$10 \frac{1}{3}$	$1103 \frac{10}{27}$			
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Ra-

Radici.	Cubi.	Differenze prime.	Differenze seconde.	Differenze ultime.
1 $\frac{2}{3}$	4 $\frac{17}{27}$	14 $\frac{1}{3}$	16	6
2 $\frac{2}{3}$	18 $\frac{26}{27}$	30 $\frac{1}{3}$	22	6
3 $\frac{2}{3}$	49 $\frac{8}{27}$	52 $\frac{1}{3}$	28	6
4 $\frac{2}{3}$	101 $\frac{17}{27}$	80 $\frac{1}{3}$	34	6
5 $\frac{2}{3}$	181 $\frac{26}{27}$	114 $\frac{1}{3}$	40	6
6 $\frac{2}{3}$	296 $\frac{8}{27}$	154 $\frac{1}{3}$	46	6
7 $\frac{2}{3}$	450 $\frac{17}{27}$	200 $\frac{1}{3}$	52	6
8 $\frac{2}{3}$	650 $\frac{26}{27}$	252 $\frac{1}{3}$	58	
9 $\frac{2}{3}$	903 $\frac{8}{27}$	310 $\frac{1}{3}$		
10 $\frac{2}{3}$	12 3 $\frac{17}{27}$			
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

CA-

CAPITOLO XI.

De' numeri rotti, che ſono le Frazioni.

AVendo diſcorſo di ſopra delle Frazioni, che talvolta ſi aggiungono al quoziente della diviſione, e alle radici quadrate, o cubiche di un numero non eſattamente quadrato ne cubico, ed ancora a' quadrati, ed a' cubi eſattamente fatti da tali radici compoſte di numero intiero e di un rotto, ed ancora le loro differenze talvolta ſi veggono avere aggiunte delle frazioni. Ora biſogna per maggior chiarezza vedere più particolarmente, che coſa ſiano tali frazioni o numeri rotti, e come ſi maneggino nel calcolarli, perchè ſovente accade di doverli ſommare, o ſottrarre, o moltiplicare, o dividere; dal che potrà oſſervarſi, come ſiano fatte le già eſpreſſe nelle Tavole precedenti.

La frazione eſſendo compoſta di due numeri intercetti tra una retta linea traſverſale, per cui ſeparaſi il ſuperiore (che diceſi *Numeratore*) dall' inferiore (che è detto *Denominatore*) deve ſempre avere quell' inferior numero maggiore dell' altro, che è al di ſopra; imperocchè quello denomina alquante parti delle unità, da queſt' altro enumerate, e non può farſi un numero intero con tali frazioni; però ſe il denominatore foſſe uguale al numeratore, per eſempio $\frac{3}{3}$, o $\frac{7}{7}$, o $\frac{15}{15}$ ſignificherebbero una ſemplice unità, che tanto ſono tre terzi, quanto ſette ſetteſimi, o quindici quindiceſimi, e ſe foſſe minore il denominatore del

del ſuo numeratore, importerebbe qualche numero, come ſe fuſſe duplo, o triplo, o quadruplo &c. quello di queſto, ne importerebbe il 2, o pure il 3, o il 4, per eſempio $\frac{14}{7}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{12}{3}$ &c. eſpongono quello il due, l' altro il tre, e l' ultimo il quattro, e così gli altri: ma ſe non foſſe il numeratore ugualmente molteplice del denominatore, di cui però ſia maggiore, converrà rimettere tale frazione ad un numero, con un altra frazione particolare; per eſempio $\frac{23}{5}$ è uguale a 4 e $\frac{3}{5}$, perchè il 5 entra 4 volte nel 20, e ne avanza il 3; ſimilmente $\frac{243}{34}$ è uguale a 7 $\frac{5}{34}$, perchè 34 via 7 fa 238, e ne avanza 5 per giungere al 243.

Se il numeratore, ed il denominatore foſſero diviſibili pel medeſimo numero, potrebbe la frazione ridurſi in numeri minori; per eſempio $\frac{423}{912}$, in cui può dividerſi per 3 tanto il ſuperiore, che ridurrebbeſi in 141, quanto l' inferiore, che riduceſi in 304, ſi doverà ridurre a queſt' altra frazione $\frac{141}{304}$; così pure la frazione $\frac{644}{1012}$ potendoſi dividere per 4 ambidue li ſuoi numeri, dovrà ridurſi a $\frac{161}{253}$, anzi però queſto numeratore 161, dividendoſi per 23 in 7, ed il denominatore 253 altresì dividendoſi per 23 in 11, potrà farſi più piccola eſſa frazione, in $\frac{7}{11}$, che è la ſteſſa con la prima $\frac{644}{1012}$, eſſendo così diviſo l' uno e l' altro numero per 92.

Alle volte però conviene ridurre alcune diverſe frazioni di denominatore diverſo, ed altre loro uguali denominate da uno ſteſſo numero, per eſempio; ſiano eſpoſte le frazioni $\frac{3}{5}$, e $\frac{4}{7}$, ſi moltiplichi alternatamente il numeratore dell' una col denominatore dell' altra, cioè 3 via 7 fa 21, e

4 via 5

4 via 5 fa 20, e questi prodotti diventino li numeratori di due altre frazioni, il di cui denominatore sia poi il prodotto di ambi li primi denominatori, cioè 5 via 7, che fa 35, però le due proposte frazioni si saranno ridotte a queste due altre $\frac{21}{35}$, e $\frac{20}{35}$, equivalenti alle prime due, con quest' altro medesimo denominatore di ciascheduna 35; essendo i numeri della prima $\frac{3}{5}$ moltiplicati per 7, onde riesce $\frac{21}{35}$, ed i numeratori della seconda $\frac{4}{7}$ moltiplicati per 5, onde riesce $\frac{20}{35}$.

Occorrendo poi sommare insieme più frazioni ridotte come sopra ad un medesimo denominatore, basta sommare i loro numeratori, ed in uno ridurli; così per sommare $\frac{3}{5}$ con $\frac{4}{7}$, primieramente riduconsi alle altre due loro uguali $\frac{21}{35}$, e $\frac{20}{35}$, poi si sommano insieme i loro numeratori 21, e 20, che fanno 41, onde ne riesce la somma di ambidue uguale a $\frac{41}{35}$, che però riuscendo il numeratore maggiore del denominatore, si sottragga 35 da 41, che entrandovi una volta sola, con l'avanzo di 6, sarà la somma di quelle due frazioni uguale ad 1 $\frac{6}{35}$, cioè uguale ad una unità, e sei parti trigesimequinte.

Ma volendo sottrarre una frazione dall' altra, come il $\frac{4}{7}$ da $\frac{3}{5}$, ridotte alla stessa denominazione $\frac{20}{35}$, e $\frac{21}{35}$, si vede, che sottraendo il numeratore di quella dal numeratore di questa, ne rimane per residuo $\frac{1}{35}$, onde si ha che $\frac{1}{35}$ con $\frac{20}{35}$ essendo uguale a $\frac{21}{35}$, perciò l' $\frac{1}{35}$ con $\frac{4}{7}$, è a $\frac{3}{5}$ uguale.

Se poi ci occorre moltiplicare una frazione con qualche numero intero, o con un altra frazione, basta nel primo caso moltiplicare il numeratore con l' altro numero, e ritenere la stessa

ſa denominazione; per eſempio, volendo moltiplicare $\frac{3}{7}$ per 2 ne riuſcirà queſt' altra frazione $\frac{6}{7}$; ma volendo quella prima moltiplicare per 5, ne riuſcirebbe 5 via 3 uguale a 15, cioè $\frac{15}{7}$, ove riuſcendo maggiore il numeratore del denominatore, ſi può ridurre a 2 $\frac{1}{7}$, perchè il 7 è la metà di 14, onde nel 15 vi entra due volte, con l'unità di più; che ſe ſi voleſſe moltiplicare $\frac{3}{4}$ per il numero 8, diventerebbe $\frac{24}{4}$, il che può ridurſi all' intero numero 6, perchè ſei volte entra il 4 nel 24. Ma pure ſe ſi vorrà moltiplicare una frazione in un altra, per eſempio $\frac{3}{4}$ in $\frac{7}{11}$, ſi deve moltiplicare inſieme, non ſolo i numeratori, ma ancora i denominatori, con che ſi fa un altra frazione, perchè 3 via 7 fa 21, e 4 via 11 fa 44, onde moltiplicati $\frac{3}{4}$ in $\frac{7}{11}$, rieſce $\frac{21}{44}$; e ſimilmente, moltiplicando inſieme $\frac{5}{6}$ e $\frac{13}{30}$, ne rieſce $\frac{65}{180}$, i quali numeri potendoſi dividere ambidue per 5, ne rieſce il prodotto $\frac{13}{36}$.

Alle volte ſi potrà fare la diviſione di una frazione per un numero aſſoluto, o per un altra frazione; quanto alla prima operazione, baſta moltiplicare il denominatore per quel numero dato; per eſempio, ſi voglia dividere $\frac{3}{5}$ per 8; ſi moltiplichi per 8 il denominatore 5, che diventerà 40, e la frazione $\frac{3}{40}$ ſarà il quoziente di tale diviſione. Se però il numeratore della frazione dividenda ſi poteſſe intieramente dividere pel numero dato, baſterebbe dividerne il numeratore, e laſciare il denominatore come prima. Per eſempio, volendo dividere la frazione $\frac{6}{13}$ per 2, baſta dividere il 6 per 2, che rieſce 3, onde il quoziente ſarà $\frac{3}{13}$; ma volendo dividere una frazio-

zione per un altra, come sarebbe $\frac{3}{5}$ per $\frac{7}{11}$, si moltiplichi il numeratore del primo col denominatore del secondo, cioè 3 via 11, che farà 33, e questo si ponga per numeratore del quoziente, indi moltiplicato il numeratore del secondo col denominatore del primo, cioè 7 via 5, che fa 35, si ponga questo per denominatore del quoziente, che sarà $\frac{33}{35}$, e così sarà fatta la divisione della prima frazione per la seconda. Si potrebbero ancora rivoltare i numeri della frazione dividente, e così riposta moltiplicarla con l' altra; per esempio, volendo dividere $\frac{3}{5}$ per $\frac{7}{11}$, si rimetta di sopra l' 11, e di sotto il 7, riuscendo $\frac{11}{7}$, il che moltiplicato per l' altra frazione $\frac{3}{5}$, riuscirà $\frac{33}{35}$, come divisione di $\frac{3}{5}$ per $\frac{7}{11}$.

Si osservi, che la moltiplicazione de' numeri interi rende il prodotto maggiore, e la divisione dell' uno per l' altro rende il quoziente minore, ma al contrario la moltiplicazione delle frazioni rende il prodotto minore, e la loro divisione fa il quoziente maggiore, mentre si è veduto, che moltiplicando $\frac{3}{4}$ in $\frac{7}{11}$ riesce $\frac{21}{44}$, il che è minore tanto dell' uno, quanto dell' altro, perchè $\frac{3}{4}$ è uguale a $\frac{33}{44}$, e $\frac{7}{11}$ uguaglia il $\frac{28}{44}$, di ciascuno de' quali è minore il $\frac{21}{44}$; ma dividendo $\frac{3}{5}$ per $\frac{7}{11}$, ne riesce il quoziente $\frac{33}{35}$, che è maggiore di ciascuna di tali frazioni, che si potrebbero ridurre col medesimo denominatore, cioè $\frac{3}{5}$ uguale a $\frac{21}{35}$, e $\frac{7}{11}$ a $\frac{21}{33}$, o pure a $\frac{22}{35}$ con $\frac{1}{385}$: onde di ciascuno di essi è maggiore il quoziente $\frac{33}{35}$: e se viceversa si fosse diviso il $\frac{7}{11}$ per $\frac{3}{5}$, sarebbe riuscito per quoziente a roverscio il $\frac{35}{33}$, che è maggiore dell' unità, cioè uguale ad 1 $\frac{2}{33}$; siccome ancora dividen-

do $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{8}$, si farebbe $\frac{24}{4}$, che è un intero uguale a 6.

La ragione sì è, perchè essendo i numeri interi composti di unità, e le semplici frazioni minori di essa, come che il prodotto della moltiplicazione deve contenere tante volte uno de' numeri moltiplicati, quante volte l' altro contiene l' unità, perciò ne' numeri interi riesce il prodotto maggiore, come moltiplicati insieme il 3 e il 7, fanno 21, che tante volte contiene il 7, quante volte il 3 contiene l' unità; ma nelle frazioni $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{11}$, se il prodotto $\frac{21}{55}$ deve contenere tante volte una di esse $\frac{3}{5}$ quante volte l' altra $\frac{7}{11}$ contiene l' unità, mentre questa è minore dell' unità, così pure esso prodotto $\frac{21}{55}$ deve meno contenere essa frazione moltiplicata $\frac{3}{5}$, e così pure essere minore dell' altra $\frac{7}{11}$, perchè ancora $\frac{3}{5}$ è minore dell' unità. Viceversa nella divisione, il quoziente deve contenersi tante volte nel dividendo, quante volte si contiene l' unità nel divisore, e però ne' numeri interi, siccome l' unità è minore del divisore (non potendosi dividere cosa alcuna per l' unità, ma per il numero maggiore di essa) così il quoziente è minore del dividendo; per esempio, il 21 diviso per 7 fa il quoziente 3, che tanto si contiene in 21, quanto si contiene l' unità in 7, ed è altrettanto minore il 3 di 21, come l' unità è minore di 7, ma nelle frazioni, deve il quoziente essere maggiore della frazione da dividersi, come pure l' unità è maggiore dell' altra frazione dividente; così diviso $\frac{4}{7}$ per $\frac{3}{5}$, ne riesce $\frac{20}{21}$, che tanto è maggiore di $\frac{4}{7}$ (cioè di $\frac{12}{21}$, che è lo stesso, molti-

tipli-

tiplicati per 3 ambi i numeri ſuperiore ed inferiore) come il 5 è maggiore di 3 (eſſendo 5 a 3, come 20 a 12), cioè come l' unità (uguale a $\frac{5}{5}$) è maggiore di $\frac{3}{5}$.

Circa il cavare la radice quadra o cubica da una frazione, ſe il numeratore ed il denominatore ſono quadrati, le loro radici quadre ne fanno la ricercata quadra radice, come ſe ſi vuole la radice quadra di $\frac{9}{25}$, ſi trova eſſere $\frac{3}{5}$, perchè ciò moltiplicato in ſe ſteſſo fa il $\frac{9}{25}$, e ſe tanto il numeratore quanto il denominatore foſſero cubi, la radice cubica di tale frazione ſi eſpone con le radici cubiche del ſuperiore e dell' inferiore; per eſempio, eſſendo la frazione $\frac{27}{343}$, la ſua radice cubica ſarà $\frac{3}{7}$, eſſendo il 3 radice cuba di 27, ed il 7 radice cuba di 343. Se poi foſſe il quadrato, o il cubo ſolamente in uno di que' numeri della frazione, cioè nel numeratore o nel denominatore, come ſarebbe $\frac{9}{23}$, ò $\frac{17}{100}$, o pure $\frac{27}{74}$, ò $\frac{43}{216}$, non ſi potrebbe farne l' eſatta radice, ma in quelle due prime ſi eſporrebbe la radice quadra in queſta maniera $\frac{3}{\sqrt{23}}$ e $\frac{\sqrt{17}}{10}$; e nelle altre due la radice cubica ſarebbe $\frac{3}{\sqrt[3]{74}}$, e $\frac{\sqrt[3]{43}}{6}$, ponendo la vera radice di que' numeri quadrati o cubi, ed eſponendo la radice quadra del numero non quadrato col ſegno $\sqrt{..}$, e la radice cuba di quello che non è cubico, col ſegno $\sqrt[3]{..}$; ſe poi neſſuno di quei numeri foſſe quadrato, come $\frac{3}{7}$, la ſua quadra radice ſi eſprimerà col ſegno d' ambidue $\sqrt{\frac{3}{7}}$, e non eſſendo pure nella frazione ve-

run numero cubico, la sua radice cubica si esporrà parimente con l' altro segno $\sqrt[3]{\frac{3}{7}}$; se pure non fosse di maggiori numeri, di cui trovandosi la radice prossima almeno alla sua esatta, con esse si farebbe la frazione radicale; per esempio, di questa frazione $\frac{13925}{30277}$ sarà prossima la radice quadra $\frac{118}{174}$ (essendo 118 prossima radice di 13925, alquanto minore, perchè il suo quadrato sarebbe 13924 solamente; ed il 174 è radice quadra prossima al 30277, essendo il quadrato di essa alquanto minore 30276) e della frazione medesima dovrebbe dirsi radice quadra $\frac{59}{87}$, che è la stessa con $\frac{118}{174}$, essendo questi due numeri pari, e però divisibili ambidue per mezzo nell' altra addotta frazione radicale. Parimente della frazione $\frac{68921}{884735}$ la radice cubica prossima sarà $\frac{41}{96}$, perchè il cubo di questa sarebbe $\frac{68921}{884736}$ prossimo a quello.

Finalmente si osservi, che alcuni chiamano *Innestamenti*, o pure *Infilzamenti* di varie frazioni il prendere alcuni rotti di altri rotti, per esempio $\frac{1}{3}$ di $\frac{3}{4}$ di $\frac{3}{5}$ di $\frac{4}{7}$, o a soli due per volta, o a tre, o a molti altri, il che quantunque torni difficile a molti, che non trovano la maniera di calcolarli, si può facilmente fare, bastando moltiplicare insieme i loro numeratori, ed insieme parimente i denominatori di esse frazioni, e fattasi la frazione col prodotto di quello e di questo, ne riuscirà il desiderato infilzamento. Così de' quattro rotti sopra proposti, ne deve riuscire $\frac{36}{420}$, uguale a $\frac{3}{35}$, dividendosi per 12 tanto il numeratore quanto il deno-

no-

nominatore; imperocchè moltiplicati insieme i numeratori delle date frazioni 1, 3, 3, e 4, fanno 36, e moltiplicati i loro denominatori 3, 4, 5, e 7, fanno 420. Che ciò sia ben fatto si può così dimostrare $\frac{1}{3}$, di $\frac{3}{4}$ certamente è $\frac{1}{4}$, ed $\frac{1}{4}$ di $\frac{3}{5}$ (che è lo stesso di $\frac{12}{20}$ moltiplicando il numeratore, ed il denominatore per 4) sarà $\frac{3}{20}$, e questo di $\frac{4}{7}$ (che sarebbe il medesimo $\frac{40}{70}$ moltiplicati ambi li numeri per 10) sarà $\frac{6}{70}$, perchè nel 40 il 20, è due volte, onde siccome $\frac{1}{20}$ sarebbe $\frac{2}{70}$, così il $\frac{3}{20}$ è $\frac{6}{70}$; il che per 6 moltiplicato riesce $\frac{36}{420}$, come si era trovato di sopra, uguale però a $\frac{3}{35}$, che sarà la semplice frazione, che riesce nell' infilzamento di $\frac{1}{3}$ del $\frac{3}{4}$, del $\frac{3}{5}$, e del $\frac{4}{7}$. Il che &c.

CAPITOLO XII.

Della Regola del Tre.

QUando tre quantità sono proposte in numeri, e si cerca una quarta, che corrisponda proporzionale alla terza, come la seconda alla prima, allora vi bisogna la regola del Tre, che brevemente si fa così. Si moltiplichi il secondo termine col terzo, e dividasi il prodotto per il primo, sarà il quoziente quel termine quarto che si ricercava, proporzionale a' tre dati. Per esempio, se un Drappo di braccia 30 costasse scudi 50, e si cercasse comprarne braccia 12, si domanda quanti scudi ci vorranno? Si moltipichi il secondo numero 50 nel terzo, che è 12, il prodotto sarà 600, e questo si divida per il primo nu-

```
     50 — 12
    ----
    600
30)  20
```

mero 30, onde riesce il quoziente 20; però le braccia 12 importeranno 20 scudi.

Conviene avvertire, che alle volte il quesito non è proposto con ordine; per esempio chi dicesse, essendo che 30 braccia mi costano scudi 50, volendo spendere solamente scudi 20, quante braccia potrò averne? La questione non è proposta ordinatamente, ma si dovea dire, se scudi 50 ci danno 30 braccia, con scudi 20 quante braccia si compreranno? e così moltiplicato il secondo nel terzo, che fa 600, e questo diviso per il primo 50 riuscirà 12, che sarà il numero delle braccia ricercate con scudi 20. Però bisogna talmente disporre i termini del quesito, che le cagioni e gli effetti siano in un luogo simile, onde corrisponda il primo al terzo, ed il secondo al quarto quesito, però se nel terzo termine si pongono gli scudi, e si cerca nel quarto il numero di braccia, conviene nel primo termine proporre gli scudi, e nel secondo le braccia che gli corrispondono, e così similmente nelle altre proposte.

Alle volte però conviene adoperare la regola del tre a roverscio, moltiplicando il primo termine nel secondo, e dividendo il prodotto pel terzo, cioè, quando il quarto termine proporzionale, che si cerca, non corrisponde direttamente al suo omologo, ma reciprocamente, cioè quando crescendo il terzo non deve crescere il quarto, ma farsi minore del secondo, come il primo è minore del terzo; per esempio. Suppongo che a spazzare tutte le strade di una Città, o farvi qualche altra opera, 3 uomini la compisca-

piscano in 8 giorni, si cerca di 12 uomini in quanti giorni la compirebbero? Si moltiplichi il primo nel secondo, cioè 3 via 8, che farà 24, e si divida questo per il terzo numero, che è 12, ne riescono 2 giorni, ne' quali questi 12 uomini potranno fare lo stesso, essendo proporzionale 2 ad 8, come 3 a 12, cioè la quarta parte di essi.

Ma se i termini non sono ne direttamente, ne reciprocamente proporzionali, allora non conviene usare questa regola. Per esempio, se una carrozza con 2 cavalli fa 3 miglia in un ora, quante miglia farebbe con 6 cavalli nell' ora medesima? Non crescendo il numero delle miglia a proporzione del numero de' cavalli, che tirano nel medesimo tempo la carrozza (altrimenti 6 cavalli farebbero 9 miglia in un ora, perchè 3 via 6 fa 18, e diviso per 2 resta 9, il che è falsissimo) però non conviene adoperare tal regola, se non quando i termini crescono proporzionalmente, o con diretta o con reciproca proporzione.

La regola del tre dovrà alle volte maggiormente comporsi, quando saranno proposti più di tre termini, come sarebbe in quest' altro quesito. Se 4 uomini in 7 giorni scavano una fossa di braccia 252; postivi 10 uomini similissimi lavoratori, in 13 giorni quante braccia ne scaverebbero?

4	7	252	10	13
4 ——	7		10 ——	13
28			130	

Bisogna ridurre i due primi numeri in un solo prodotto, con la moltiplicazione di essi, cioè, 4 via 7 fa 28, e poi moltiplicare insieme gli due ultimi 10 via 13, che fanno 130, imperocchè 4 uomini in 7 giorni faranno lo stesso, che un solo uomo in giorni 28, e quello si farebbe da 10 uomini in 28 giorni, si farebbe pure da uno in giorni 130, però il quesito sarà simile a questo;

28 252 130

$$\begin{array}{r} 252 \text{ --- } 130 \\ \hline 32760 \\ 28)\ 1170 \end{array}$$

se da un Uomo in 28 giorni si fanno 252 braccia, dal medesimo uomo in 130 giorni quante braccia se ne farebbero? Si moltiplichi il secondo nel terzo, cioè 252 in 130, che ne riuscirà 32760, e questo diviso per il primo numero 28, riuscirà 1170; dunque saranno queste le braccia, che in 13 giorni scaverebbero 10 uomini, ovvero un uomo solo in giorni 130.

Talvolta ancora si potrà replicare la regola del tre, in due, o più volte. Per esempio, se un uomo in 4 mesi, con 30 scudi prestati ad un altro, ne ha guadagnati $2\frac{1}{2}$, in quanto tempo prestando 600 scudi, ne potrebbe guadagnare 200?

4 30 $2\frac{1}{2}$ 600 200

Primieramente, siccome in 4 mesi gli 30 scudi, hanno guadagnato $2\frac{1}{2}$, così nello stesso tempo quanti

quanti se ne guadagnerebbero con 600 scudi?

30 $2\frac{1}{2}$ 600

$$\begin{array}{r} 600 \text{ — } 2\frac{1}{2} \\ 30)\ \overline{1500} \\ 50 \end{array}$$

moltiplicato il $2\frac{1}{2}$ in 600, diviene 1500, e diviso per 30, ne riesce 50; Quindi però si faccia un altra regola del tre, dicendo;

50 4 200

$$\begin{array}{r} 200 \text{ — } 4 \\ 50)\ \overline{800} \\ 16 \end{array}$$

se si averebbero (dalli scudi 600) scudi 50 in mesi 4, gli scudi 200 in quanti mesi si acquisterebbero? Moltiplicato il 4 in 200 fa 800, e questo diviso per 50, ne viene 16; dunque in un anno, e nel terzo dell' anno seguente, che saranno mesi 16, verranno acquistati gli scudi 200 per li 600 proposti. Così parimente farassi in altri quesiti proposti.

CAPITOLO XIII.

Della Regola di Compagnia.

Quando più persone concorrono ad un negozio, contribuendo parte del loro danaro, gua-

guadagnano a proporzione del capitale che hanno impiegato a benefizio di quel negozio, allora per sapere distribuire a ciascuno quel guadagno, che giustamente gli tocca, bisogna si adoperi la presente regola. Si raccolgono in una somma i capitali contribuiti da ciascuno, e paragonasi questa somma col guadagno comune, poi si cava dal particolar capitale di uno, quale sia il frutto, che gli si deve, onde con la regola del tre si trova il guadagno di questo, e di quell' altro mercante.

Suppongasi per esempio, che Pietro contribuisse per una mercanzia, o per un negozio scudi 1600, Giovanni scudi 1450, e Martino scudi 1500, che in tutto sommati sono 4550, ed il guadagno comune rimanendovi impiegato il capitale di tutti, si suppone che importi al netto scudi 2460; cercasi come debba distribuirsi a ciascheduno la somma di questi danari acquistati in un medesimo tempo. Bisogna dire in questo modo; se tutto il capitale, che è 4550, ha acquistato per il comun guadagno 2460, che cosa importerà di guadagno il capitale di Pietro 1600? si moltiplichi per la regola del tre, il secondo numero 2460 col terzo 1600, e riuscirà 3936000, il che dividasi pel primo 4550, e ne riusciranno scudi 865 con la frazione $\frac{250}{4550}$, che sarebbe $\frac{5}{91}$, (diviso per 50 tanto il numeratore quanto il denominatore) sicchè il guadagno di Pietro sarà scudi appunto $865\frac{5}{91}$.

Similmente il capitale di Giovanni, che è scudi 1450, si moltiplichi con lo stesso comun guadagno 2460, e ne riuscirà 3567000, il che diviso

so pure pel primo numero 4550, ci darà il guadagno di Giovanni 783, con la frazione $\frac{4350}{4550}$, uguale ad $\frac{87}{91}$, diviso pure come l' altro per 50 tanto il numeratore, quanto il denominatore di essa frazione.

Finalmente il capitale di Martino essendo 1500 moltiplicato pure in 2460, sarà 3690000, che diviso per 4550, ci darà per guadagno di Martino scudi 810 con la frazione $\frac{4500}{4550}$, che sarà $\frac{90}{91}$, essendo similmente diviso l' uno e l' altro numero superiore, ed inferiore per 50; e può ancora provarsi essere appunto questi tre guadagni uguali a tutto il comune, mentre il primo 865 $\frac{5}{91}$, col secondo 783 $\frac{87}{91}$, ed il terzo 810 $\frac{90}{91}$ sommati insieme sono uguali al numero 2458 $\frac{182}{91}$, la qual somma di frazioni è uguale a 2, essendo 182 il doppio di 91; onde aggiunto il 2 alla somma delli interi 2458, fa per appnuto il 2460.

Ma se questi Mercanti avessero dato il danaro per diverso tempo, cioè Pietro per 2 anni, Giovanni per 3, Martino per 6, e con tutto quello stesso capitale di scudi 4550 avessero pure guadagnati gli scudi medesimi 2460; si cercherà, quanto di questo guadagno debba loro distribuirsi, oltre la restituzione del capitale, da farsi loro in quei tempi determinati. Si moltiplichi qualunque capitale per il numero degli anni, ne' quali fu concesso, cioè quello di Pietro scudi 1600 per 2 anni fa 3200, quello di Giovanni 1450 per 3 anni fa 4350, l' altro di Martino 1500 per 6 anni fa 9000, e ciascheduno di tali prodotti, moltiplicato per il comune guadagno 2460, e diviso per la somma di quei prodotti, che è

16550,

16550, ci determinerà quello che deve darsi a ciascuno. Quindi il 3200 moltiplicato per 2460 farà 7872000, che diviso per 16550, riuscirà per guadagno di Pietro 475 $\frac{10750}{16550}$, la qual frazione può ridursi a $\frac{215}{331}$ (diviso pure l' uno e l' altro numero per 50); l' altro numero 4350 moltiplicato per 2460 fa 10701000, che diviso per lo stesso 16550, darà a Giovanni 646 $\frac{9700}{16550}$, la qual frazione similmente si riduce a $\frac{194}{331}$; e finalmente il terzo numero 9000 moltiplicato per 2460, fa 22140000, il che diviso per 16550, ci dà 1337 $\frac{12650}{16550}$, la qual frazione riesce pure $\frac{253}{331}$, e questo sarà il guadagno di Martino; in fatti la somma di questi tre numeri interi sarebbe 2458, che così importano li tre numeri 475, 646, e 1337, e le tre frazioni $\frac{215}{331}$, $\frac{194}{331}$, $\frac{253}{331}$, fanno $\frac{662}{331}$, che è uguale a 2, il che aggiunto all' intera somma 2458 farà per appunto 2460, che è tutto il guadagno distribuito a' tre Mercanti, come si è detto 475 $\frac{215}{331}$ a Pietro, 646 $\frac{194}{331}$ a Giovanni, e 1337 $\frac{253}{331}$ a Martino, che ha più degli altri per aver dato il capitale in maggior tempo.

Altri tre uomini, Alessandro, Giorgio, e Lorenzo, dicono d' avere fra tutti guadagnata la somma di 2800 scudi, avendo il primo Alessandro posto di capitale scudi 2000, ed il secondo 2350, che fu Giorgio, ma non si ricorda quanti ne ponesse il terzo, cioè Lorenzo, e solamente sapevasi, che per lui vi erano di guadagno scudi 100, però si cerca, quanti scudi di capitale ne avesse dati? e viceversa, quanti ne guadagnasse Alessandro, e quanti ne avesse Giorgio? Per ritrovare tuttociò, primieramente dal comun gua-

da-

dagno di ſcudi 2800, ſe ne ſottragga il guadagno di 100 venuto a Lorenzo, ne rimarranno ſcudi 2700, che ſaranno convenuti ad ambidue gli precedenti Aleſſandro, e Giorgio; e preſa la ſomma degli ſcudi già da loro propoſti 2000 e 2350, che è 4350, con la regola del tre ſi moltiplichi la ſomma del guadagno de' due primi 2700, con gli ſcudi 2000 dati dal primo, ed il prodotto 5400000, ſi divida per la ſomma 4350 degli ſcudi dati da ambidue, che ſarà 1241 $\frac{1650}{4350}$, la qual frazione diviſa nel numeratore e nel denominatore per 50, diventerà $\frac{33}{87}$, anzi queſti due numeri diviſi per 3, faranno la frazione $\frac{11}{29}$; ſicchè il guadagno di Aleſſandro ſarà 1241 $\frac{11}{29}$, eſſendo ciò proporzionale alla ſomma degli ſcudi 2000 da lui propoſti, come il guadagno d' ambidue 2700, alla ſomma 4350 degli ſcudi da loro inſieme dati. Onde poi il reſto del guadagno de' due primi 2700, levatogli 1241 $\frac{11}{29}$, che rimarrà 1458 $\frac{18}{29}$, ſarà pure il guadagno del ſecondo, cioè di Giorgio. Ci reſta poi da trovare, quale ſia il numero degli ſcudi dati dal terzo, cioè da Lorenzo, e ſi troverà con queſt' altra regola del tre, dovendo eſſere nella ſteſſa proporzione, come il guadagno delli due precedenti 2700 al loro capitale degli ſcudi propoſti 4350, così il guadagno del terzo 100, al capitale del medeſimo Lorenzo; però moltiplicato 4350 in 100, che diverrà 435000, dividendolo per 2700, che rieſce $\frac{435000}{2700}$ uguale a $\frac{4350}{27}$ (levati di ſopra, e di ſotto li due zeri) onde proviene 161 $\frac{3}{27}$, che è lo ſteſſo capitale da eſſo dato di ſcudi 161 $\frac{1}{9}$; (perchè il 3, ed il 27 ſi poſſono dividere per 3.)

Ecco

così con queste misure si farà una massa da vendersi al prezzo mediocre proposto.

Per esempio, un Mercante ha due specie di vino, o d' olio, delle quali la prima importa di prezzo soldi 20 il fiasco, e la seconda soldi 13 solamente; vorrebbe egli mescolarli in tal dose, che si dovesse vendere soldi 15 il fiasco, onde ricerca quanti fiaschi dell' uno e dell' altro debba insieme unire. Si osservi, che la differenza del prezzo mediocre 15 dal maggiore 20, è di 5, e la differenza del prezzo minimo 13 dallo stesso mediocre, è solamente 2; si piglino adunque 2 misure della prima specie, e 5 dell' altra minima, e si mescolino insieme; così riusciranno 7 misure mescolate da vendersi al prezzo mediocre proposto di soldi 15 il fiasco; Imperocchè il valore di 2 misure del massimo prezzo 20 sarebbe soldi 40, ed il valore di 5 misure del minimo prezzo 15 sarebbe soldi 65; e però il valore di tutte quelle 7 misure sarà soldi 105, che divisi per 7, danno 15 soldi per ciascheduna misura, il che appunto è il prezzo mediocre proposto; e siccome ciò avviene, presi due fiaschi del maggior prezzo, e cinque fiaschi del minore, così ancora si potranno mescolare due barili del primo, con cinque barili del secondo; e lo stesso si farebbe con qualunque misura dell' uno e dell' altro, con simile proporzione mescolata.

Se occorresse di mescolare insieme più di due specie di róba: per esempio, il primo vino che costa 18 soldi il fiasco; il secondo che ne costa 13 soldi, il terzo che ne costa 10 soldi; e si vorreb-

rebbero meſcolare in maniera, che poſsa venderſi 15 ſoldi il fiaſco; ſi pigli la differenza di queſto mediocre prezzo 15 dal maggiore 18, che è 3, indi la differenza del medeſimo 15 dal minore 13, che ſarà 2, e dal minimo 10, che è 5; poſcia ſi piglino 2 miſure del primo, e 3 del ſecondo, come ſi è veduto doverſi fare nel caſo di ſopra, tra il primo e il ſecondo: e dipoi 5 altre miſure del primo, e 3 del terzo, come importerebbe la ſola meſcolanza di queſti due, ne avremo adunque 7 miſure del primo, 3 del ſecondo, e 3 pure del terzo, che in tutto ſaranno 13, e dovranno valere 15 ſoldi per fiaſco, cioè 195 ſoldi in tutto, perchè 7 del primo, che vale 18 per ciaſcun fiaſco, ne importa 126, 3 del ſecondo, che ne vale 13 per ciaſcuno, ne importa 39, e i 3 del terzo, che ne vale 10 per qualunque fiaſco, ne importa 30, le quali miſure portano ſimilmente lo ſteſſo prezzo di 195.

E ſe foſſero ancora da unirſi più ſpecie diverſe, come ſe la libbra di Pepe valeſſe 3 paoli, quella di Garofano paoli 2, quella di Cannella paoli 6, e quella di Zafferano paoli 9, e ſi voleſſero meſcolare in maniera, che ſi paghi paoli 5 la libbra; notata la differenza di ciaſcun prezzo dal medio *M*, che ſarà dal Pepe *P*. 2 paoli, dal Garofano *G*. 3 paoli, dalla Cannella *C*. paoli 1, e dal Zafferano *Z*. paoli 4; ſi pongano tante libbre del Pepe, e del Garofano, che ſono di minor prezzo del

P.	3	2
G.	2	3
M.	5	
C.	6	1
Z.	9	4

medio, quanta è l' altra ſomma delle differenze di eſſo medio, dagli altri due della Cannella, e del Zafferano, che hanno prezzo maggiore; e poi tante libbre di Cannella e di Zafferano, quanta è la ſomma delle differenze del medio da gli altri due Pepe e Garofano, che hanno prezzo minore; ſicchè 1 e 4 facendo 5, baſta prendere 5 libbre di Pepe, e libbre 5 di Garofano; ed eſſendo ancora le differenze 2 e 3 parimente uguali a 5 (ſe foſſero in altro numero, in quello ſi prenderebbero pure gli altri) ſi potranno prendere altresì libbre 5 di Cannella, e libbre 5 di Zafferano, e così la ſomma di tali robe meſcolate, dovrà pure farſi pagare a 5 paoli la libbra; imperocchè libbre 5 di Pepe coſtano paoli 15, altrettante di Garofano paoli 10, quelle pure della Cannella paoli 30, e le altre cinque di Zafferano paoli 45, la cui ſomma è 100, però eſſendo tutto il meſcuglio di queſte quattro coſe libbre 20, avendone 5 ciaſcheduna, è chiaro che i paoli 100 con cui ſi comprano, corriſpondono per l' appunto 5 a ciaſcuna delle ſteſſe libbre 20, e così potrà farſi qualunque altra meſcolanza di più coſe, con queſta Regola di Alligazione, purchè il prezzo che ſi vuole che abbia la loro ſomma ſia medio, cioè maggiore di quello di alcuni, e minore di quello degli altri.

5	*P.* —	15
5	*G.* —	10
5	*C.* —	30
5	*Z.* —	45
		100

Se voleſſe uno farſi fare una Statua di libbre 35 d' argento, e pagare 86 paoli ciaſcuna libbra, non potendo pagarla tutta, ſe non con paoli

3010; l' Argentiere, che avea una ſorte d' argento di paoli 90 la libbra, un altra di 84, ed una terza di 80 paoli la libbra, come potrà meſcolare quelle ſorti d' argento, perchè la Statua di 35 libbre veniſſe a coſtare paoli 86 la libbra? Io dico che dovrà dargli del primo argento libbre 17 $\frac{1}{2}$, del ſecondo e del terzo libbre 8, con 9 once tanto dell' uno quanto dell' altro, la ſomma delle quali farà le libbre 35, che a paoli 86 l' una, importeranno paoli 3010; imperocchè le libbre 17 $\frac{1}{2}$ del primo, di cui ciaſcuna libbra nè vuole 90 paoli, importeranno paoli 1575: le libbre 8 del ſecondo a paoli 84 di ciaſcheduna, ſaranno paoli 672, e le 9 once, che ſono 3 quarti della libbra, ne importano paoli 63, e però tutto il prezzo di libbre 8 e 9 once, importa paoli 735; le libbre poi del terzo argento, eſſendo 8, importa paoli 640, e le ſue once 9, che ſono tre quarti della libbra, ne importano paoli 60, onde tutto il di lui prezzo ſarà paoli 700, le quali tre ſomme importeranno pure paoli 3010, come ſi vuol dare per tutto l' argento di 35 libbre della Statua.

Libbre.	*Once.*
17	6
8	9
8	9
35	—

1575
735
700
3010

Come ſianſi trovati queſti numeri delle libbre di tali argenti, può dimoſtrarſi così: ſi trovino le differenze del medio 86 dal primo 90, che è 4, e dal ſecondo 84, che è 2, e dal terzo 80, che è 6, però del primo prendaſi le libbre 2

e le libbre 6, che sono libbre 8, e del secondo e del terzo si prendano le libbre 4, secondo le addotte differenze; quindi sarebbero 16 libbre composte delle 8 del primo argento, di 4 del secondo, e di altre 4 del terzo, le quali libbre costeranno paoli 86 per ciascheduna, essendo 16 via 86 uguale a 1376, siccome 8 via 90 uguale a 720 e 4 via 84 uguale a 336, e 4 via 80 uguale a 320, che pure posti insieme sommano 1376; ma dovendo averne non solo quelle 16 libbre, che costano paoli 1376, ma libbre 35, che sono il doppio e $\frac{3}{16}$; perciò del' primo argento prese 16, del secondo 8, e pure del terzo 8, diventeranno 32, e dovendo aggiungergli altre 3, il primo (che ha sempre il doppio del secondo e del terzo, cioè ad ambidue uguale) deve pure accrescersi di una libbra e mezza, e l' altra libbra e mezza negli altri due, dividendole ugualmente in ciascuno, che però si aggiungono once 9 al secondo, ed once 9 al terzo, le quali prese insieme sono 18, onde le libbre del primo devono essere $17\frac{1}{2}$, del secondo 8 libbre con 9 once, e del terzo altrettanto, come sopra si è detto.

P.	90	4
M.	86	
S.	84	2
T.	80	9

$$\begin{array}{r} 720 \\ 336 \\ 320 \\ \hline 1376 \end{array}$$

CA-

CAPITOLO XV.

Della Regola del Falso.

DA un falso supposto si cava la vera ipotesi di qualche ignoto quesito, allorchè dipende dalla moltiplicazione, dalla divisione, o da qualche proporzionalità, e questa Regola chiamasi *di Falsa posizione*, a differenza della Regola *di doppia falsa posizione*, la quale si può ancora adoperare in quelle questioni, in cui entra la sottrazione e l' addizione.

Per esempio della prima; uno abbia lasciati sette mila scudi da distribuirsi a tre figliuoli, in maniera però, che la porzione del primo sia tripla di quella del secondo, e quella pure del secondo sia doppia di quella del terzo; si cerca, come debba farsi questa distribuzione? Suppongasi ad arbitrio, che di qualsivoglia numero, per esempio, ne tocchino 50 al terzo figliuolo, ne dovranno toccare 100 al secondo, e 300 al primo, avendo il primo un triplo del secondo, ed il secondo un duplo del terzo; dunque tutti sarebbero solamente scudi 450, ma doveano essere 7000, dunqne è falso il supposto; quindi però se ne caverà il vero, dicendo per la regola del tre, se 450 vengono dallà falsa ipotesi della porzione supposta di soli scudi 50 dati al terzo figliuolo, gli scudi 7000, qual vera porzione importeranno al medesimo terzo figliuolo? ed operando al solito si moltiplichi il secondo nel terzo, cioè 50 in 7000, ne risulterà 350000, e questo diviso per

il primo numero 450, ne riuscirà 777 $\frac{7}{9}$; onde questo dovrà veramente darsi al terzo figliuolo, il doppio 1555 $\frac{5}{9}$ al secondo, ed il triplo di questo, che sarà 4666 $\frac{6}{9}$ (cioè 4666 $\frac{2}{3}$) al primo, la somma de' quali è 7000; cioè appunto gli scudi lasciati dal Padre a gli stessi figliuoli, con la suddetta condizione, onde si è ritrovata la vera distribuzione, che dovea farsi.

$$\begin{array}{r} 777\frac{7}{9} \\ 1555\frac{5}{9} \\ 4666\frac{6}{9} \\ \hline 7000 \end{array}$$

Similmente dicendosi da un Signore, di avere con 275 scudi fatta comprare una carrozza, un calesse, e due cavalli, e che il prezzo della carrozza fu triplo di quello del calesse, e i cavalli costarono tre metà del prezzo di esso calesse; si cerca, quale era il prezzo della carrozza, quale del calesse, e quale de' due cavalli? Suppongasi benchè falsamente, che si comprassero i cavalli con scudi 12, però il calesse ne importerebbe 8, essendo il 12 tre metà di 8, cioè 3 volte 4, e la carrozza ne averebbe avuti 24, costando il triplo del calesse, e la somma di questi tre prezzi sarebbe 44, e con la regola del tre, siccome è il 44 al prezzo di alcuna di queste cose, per esempio a quello del calesse, che è 8, così i 275 scudi spesi da quel Signore, averanno la stessa proporzione al suo vero prezzo del calesse; onde moltiplicando l' 8 in 275 si averà 2200, che diviso per 44 ne dà 50; dunque 50 scudi è il vero prezzo del calesse, ed il triplo di esso 150 sarà il prezzo della carrozza, e quello de' cavalli, che ha tre metà di

$$\begin{array}{r} 12 \\ 8 \\ 24 \\ \hline 44 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ 150 \\ 75 \\ \hline 275 \end{array}$$

di 50 (prezzo del Calesse) riuscirà 75, la somma de' quali prezzi è appunto il 275, che tanti sono gli scudi pagati da esso Signore in queste tre compre.

La regola poi della doppia falsa posizione, si fa in quest' altra maniera, esaminando la questione prima, per qualunque falso numero, e poi per un altro: se tutti due sono maggiori o tutti due minori del numero vero, se ne notano gli eccessi, e i difetti; indi moltiplicando alternativamente la prima posizione per l' errore della seconda, e la seconda posizione per l' errore della prima, la differenza di questi prodotti, si divide per la differenza d' ambi gli errori, ed il quoziente sarà il vero numero ricercato; ma se uno degli errori fosse maggiore del vero numero, e l' altro minore di esso, si piglia la somma di que' prodotti, e dividesi per la somma d' ambi gli errori, ed il quoziente ci darà pure il proprio numero, che ricercavasi.

Per esempio; interrogato un Pastore, quante fossero le sue pecore. Rispose. Se fossero altrettante, con la metà di tante, e con un terzo di tante, aggiuntavi la mia persona, saremmo appunto 120; si cerca quante fossero tali pecore? Suppongo a capriccio, che fossero 12, le quali raddoppiate diventerebbero 24, ed aggiunta la metà di esse, sarebbero 30, essendo il 6 la metà di 12, la cui terza parte essendo poi 4, aggiuntovi questo diventerebbero 34, e col pastore 35; ma dovevano essere 120, dunque l' errore è un difetto di 85. Suppongasi un altra volta, che le pecore fossero 18, il loro doppio 36, ed

aggiuntavi la metà di esse, che è 9 diventerebbero 45, poi adattatovi il terzo delle medesime, cioè 6, diventerebbero 51, e computatovi il Pastore, sarebbero 52, il che differisce dal numero proposto 120 per 68. Si moltiplichi adunque la prima ipotesi 12 pel secondo difetto 68, del che ne proviene 816, e moltiplicando la seconda ipotesi 18 pel difetto 85 della prima, ne proviene 1530; ed essendo gli errori simili, piglio la differenza di questi prodotti, che è 714, e la divido per la differenza de' suddetti errori 68 e 85, che è 17, onde rimane il quoziente 42; e questo appunto sarà il numero delle pecore, il cui doppio sarebbe 84, ed aggiuntovi la metà di 42, che è 21, si fa 105, e col terzo di esso 42, che è 14, ne risulterà 119, che con il Pastore saranno appunto 120, siccome era proposto.

12	18
85	68
1530	816

Ma se la seconda porzione fosse stata maggiore, supponendo per esempio, che le pecore fossero 48, e duplicate sarebbero 96, e con la metà di esse, cioè 24, diventerebbero 120, e con la terza loro parte, cioè 16, si farebbero 136, e col Pastore rimarrebbero 137, onde sopra il dato numero 120 vi sarebbe l' eccesso 17, onde moltiplicata la prima posizione 12 con questo eccesso 17, diviene 204, e moltiplicata la seconda

12	48
85	17
4080	204

da

da posizione 48 col difetto della prima 85, si produce 4080; ed ora deve pigliarsi la somma di tali prodotti, che sarà 4284, e dividerla per la somma di quegli errori 17 e 85, eccesso e difetto, che fanno 102, per la quale divisione parimente risulta il 42 vero numero di esse pecore, come si è veduto di sopra.

La miglior regola però di tutte queste questioni, ancora più intrigate, sarebbe quella dell'Algebra, che è più universale, e più esatta, la quale però in queste brevi instruzioni non può spiegarsi a dovere, richiedendo ciò una nuova maniera di calcolo, che si vedrà a suo luogo nelle Instituzioni Algebratiche.

CAPITOLO XVI.

Delle Combinazioni del Lotto, che suol farsi in Genova, in Milano, in Roma, ed altrove.

Dovendosi fare l'estrazione di 5, dal numero di 100, o di 90 uomini, o di più o di meno in qualche luogo, molti sogliono concorrere con i suoi danari a nominarne uno, o due, o tre, o quattro, o cinque di quelli che saranno estratti per sorte da tutto il numero di essi; Però in quante maniere si possa guadagnare, o perdere intorno a ciò che da costoro sia stato proposto, si potrà cavare da quel che si anderà quivi dimostrando.

Conviene però determinare in quante maniere da un dato numero di varj uomini, si possa per sorte,

te cavare il quintuplo, o il quadruplo, o il triplo, o il duplo, o altro calcolo di essi. Certamente il cavarne uno, quante volte può occorrere, quanti sono gli uomini proposti da cavarsi; ma il cavarne 2, dipende dalla somma di tutti i numeri antecedenti al numero degli stessi proposti; il cavarne 3, dipende pure dalla somma de' numeri de i due corrispondenti a ciascuno de' precedenti numeri; similmente il cavarne 4, dipende dalla somma de' numeri dei tre in ciascuno de' numeri antecedenti; e così il cavarne 5, dipende dalla somma de' numeri de i quattro pure in qualunque de' numeri precedenti.

Suppongasi, che proposti siano solamente 7 uomini *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*; se si deve cavarne un solo, certo qualunque di essi può esserne levato, onde pure in 7 maniere se ne caverà uno diverso; se si devono cavarne due, potranno essere, o solamente *ab*, ò pure *ac*, ò *ad*, ò *ae*, ò *af*, ò *ag*, ò *bc*, ò *bd*, ò *be*, ò *bf*, ò *bg*, ò *cd*, ò *ce*, ò *cf*, ò *cg*, ò *de*, ò *df*, ò *dg*, ò *ef*, ò *eg*, ò *fg*, che sono 21 maniera con cui se ne cavano 2, ed essendo appunto i numeri antecedenti al 7, cioè 6, 5, 4, 3, 2, 1, sommati insieme uguali a 21: perciò si fa manifesto, che il numero de' bini uomini, che possono estraersi da un proposto numero di tutti, è uguale alla somma di tutti i numeri precedenti, onde il numero di 2 in due proposti è 1 bino, in tre proposti è 3 bini, in 4 è 6, in 5 è 10, in 6 è 15, che insieme fanno 35, e tanti saranno i suoi ternarj, che appunto dovranno essere *abc*, *abd*, *abe*, *abf*, *abg*, *acd*, *ace*, *acf*, *acg*, *ade*, *adf*, *adg*, *aef*, *aeg*, *afg*, *bcd*, *bce*,

bcf,

bcf, bcg, bde, bdf, bdg, bef, beg, bfg, cde, cdf, cdg, cef, ceg, cfg, def, deg, dfg, efg; I quadernarj pure saranno altrettanti, cioè 35 (perchè i ternarj di 6 sarebbero 20, e di 5 saranno 10, e di 4 saranno 4, e di 3 un solo, che pure tutti questi numeri fanno 35) riducendo *abcd, abce, abcf, abcg, abde, abdf, abdg, abef, abeg, abfg, acde, acdf, acdg, acef, aceg, acfg, adef, adeg, adfg, aefg, bcde, bcdf, bcdg, bcef, bceg, bcfg, bdef, bdeg, bdfg, befg, cdef, cdeg, cdfg, cefg, defg*: E i quinarj sarebbero 21 (essendo i quaternarj nel numero 6 solamente 15, nel numero 5, appunto 5; e nel 4 un solo, che fanno appunto 21) cioè, *abefg, abcde, abcdf, abcdg, abcef, abceg, abcfg, abdef, abdeg, abdfg, acdef, acdeg, acdfg, acefg, adefg, bcdef, bcdeg, bcdfg, bcefg, cdefg, bdefg*.

E ciò basti di aver dimostrato in questi pochi numeri di 7, perchè ne' maggiori numeri troppo maggiori sarebbero le possibili estrazioni di essi; però nella seguente tavola si esporranno i numeri de' quintupli, de' quadrupli, de' ternarj, e de' duplici in ciascun numero prolungato fino a i 100.

Unità

Unità	Binarj.	Ternarj.	Quadernarj.	Quinarj.
1				
2	1			
3	3	1		
4	6	4	1	
5	10	10	5	1
6	15	20	15	6
7	21	35	35	21
8	28	56	70	56
9	36	84	126	126
10	45	120	210	252
11	55	165	330	462
12	66	220	495	792
13	78	286	715	1287
14	91	364	1001	2002
15	105	455	1365	3003
16	120	560	1820	4368
17	136	680	2380	6188
18	153	816	3060	8568

Unità.	*Binarj*	*Ternarj.*	*Quadernarj.*	*Quinarj.*
19	171	969	3876	11628
20	190	1140	4845	15504
21	210	1330	5985	20349
22	231	1540	7315	26334
23	253	1771	8855	33649
24	276	2024	10626	42504
25	300	2300	12650	53130
26	325	2600	14950	65780
27	351	2925	17580	80730
28	378	3276	20475	98280
29	406	3654	23751	118755
30	435	4060	27405	142506
31	465	4495	31465	169911
32	496	4960	35960	201376
33	528	5456	40920	237336
34	561	5984	46376	278256
35	595	6545	52360	324632
36	630	7140	58905	376992

Unità.	*Binarj.*	*Ternarj.*	*Quadernarj.*	*Quinarj.*
37	666	7770	66045	435897
38	703	8436	73815	501942
39	741	9139	82251	575757
40	780	9880	91390	658008
41	820	10660	101270	749398
42	861	11480	111930	850668
43	903	12341	123410	962598
44	946	13244	135751	1086008
45	990	14190	148995	1221759
46	1035	15180	163185	1370754
47	1081	16215	178365	1533939
48	1128	17296	194580	1712304
49	1176	18424	211876	1906884
50	1225	19600	230300	2118760
51	1275	20825	249900	2349060
52	1326	22100	270725	2598960
53	1378	23426	292825	2869685
54	1431	24804	316251	3162510

Unità.	*Binarj.*	*Ternarj.*	*Quadernarj.*	*Quinarj.*
55	1485	26235	341055	3478761
56	1540	27720	367290	3819816
57	1596	29260	395010	4187106
58	1653	30856	424270	4582116
59	1711	32509	455126	5006386
60	1770	34220	487635	5461512
61	1830	35990	521855	5949147
62	1891	37820	557845	6471002
63	1953	39711	595665	7028847
64	2016	41664	635376	7624512
65	2080	43680	677040	8259888
66	2145	45760	720720	8936928
67	2211	47905	766480	9657648
68	2278	50116	814385	10424128
69	2346	52394	864501	11238513
70	2415	54740	916895	12103014
71	2485	57155	971635	13019909
72	2556	59640	1028790	13991544

Unità.	Binarj.	Ternarj.	Quadernarj.	Quinarj.
73	2628	62196	1088430	15020334
74	2701	64824	1150626	16108764
75	2775	67525	1215450	17259290
76	2850	70300	1282975	18474840
77	2926	73150	1353275	19757815
78	3003	76076	1426425	21111090
79	3081	79079	1502501	22537515
80	3160	82160	1581580	24040016
81	3240	85320	1663740	25621596
82	3321	88560	1749060	27285336
83	3403	91881	1837620	29034396
84	3486	95284	1929501	30872016
85	3570	98770	2024785	32801517
86	3655	102340	2123555	34826302
87	3741	105995	2225895	36949857
88	3828	109736	2331890	39175752
89	3916	113564	2441626	41507642
90	4005	117480	2555190	43949268

Unità.	Binarj.	Ternarj.	Quadernarj.	Quinarj.
91	4095	121485	2672670	46504458
92	4186	125580	2794155	49177128
93	4278	129766	2919735	52971283
94	4371	134044	3049501	54891018
95	4465	138415	3183545	57940519
96	4560	142880	3321960	61124064
97	4656	147440	3464840	64446024
98	4753	152096	3612280	67910864
99	4851	156849	3764376	71523144
100	4950	161700	3921225	75287520

Non è ſola la maniera di ſopra eſpoſta per comporre queſta Tavola con queſti numeri determinati, che altresì può ſervire in altri numeri maggiori propoſti; ma ciò può ancora ottenerſi in altre maniere, eſſendo ogni determinazione de' numeri binarj, o ternarj, o quadernarj, o quinarj uguale ancora alla ſomma della ſua antecedente, e dell' antecedente pure dell' altro ſuo precedente. Per eſempio, nel binario dell' unità 94, che è 4371, la ſomma di queſti due fa il 4465, che ſarà il binario di 95; il ternario poi di 94 eſſendo 34044, ſommato col binario di eſſo 4371, che rieſce

138415, sarà pure il ternario di 95 e parimente sommato il ternario di 94, cioè 134044, col quadernario di esso 3049501, la somma di essi 3183545 è il quadernario di 95; e similmente con quel quadernario di 94, cioè 3049501, aggiuntovi il suo quinario 54891018, si averà 57940519, che è appunto il quinario di 95; e così accade in tutti.

Anzi dato un proposto numero di uomini, se si cerca quanti binarj possano indi cavarsi, basta moltiplicare esso numero nel precedente, e questo prodotto diviso pel mezzo sarà il quoziente de' binarj. Per esempio, se il numero degli uomini è 90 moltiplicato in 89 fa 8010, il che diviso pel mezzo, riesce 4005, e tale pure è il numero de' suoi binarj, come può vedersi nella tavola precedente. Similmente se gli uomini sono 100, moltiplicato ciò per 99, che fa 9900, e diviso pel mezzo ne dà 4950, il quale appunto è il numero de' suoi binarj; e se tali uomini fossero pure 145, moltiplicato ciò in 144, farebbe 20880, la cui metà 10440 sarebbe il numero de' suoi binarj.

Similmente, cercandosi quanti ternarj possano provenire da un dato numero d' uomini, conviene moltiplicare tal numero nel precedente, e nel prossimo anteriore, il quale prodotto, diviso per 6 ci darà il quoziente de' suoi ternarj; così essendo 90 li dati numeri, ciò si moltiplichi in 89, che fa 8010, e questo pure in 88, che riuscirà 704880, e ciò diviso per 6 riesce 117480, che appunto è il numero de' suoi ternarj. Similmente, essendo 100 il numero, moltiplicasi

plicasi il 100 in 99 ed in 98, dal che ne proviene 970200, che diviso per 6 dà 161700, il che appunto è il numero de' suoi ternarj; e se gli uomini fossero solamente 23, moltiplicato ciò per 22, che fa 506, e poscia ancora per 21, che farà 10626, ciò diviso per 6 ne viene 1771, che per l' appunto è il numero de' suoi ternarj, come può vedersi in detta tavola.

Ma cercando il numero de' quadernarj, converrà moltiplicare il numero degli uomini ne' tre numeri ad esso precedenti, e dividerne il prodotto per 24. Così ne i 90 si moltiplichi ciò per 89, per 88, e per 87, dal che ne procede 61324560, il che diviso per 24, ci dà i quadernarj 2555190; e se gli uomini sono 100 moltiplicato ciò per 99, indi per 98, poscia per 97 diviene 94109400, e ciò diviso per 24, dà 3921225, che tali sono i suoi quadernarj; e se il numero degli uomini fosse solamente 18, moltiplicando ciò in 17 fa 306, e poscia in 16 diverrà 4896, indi in 15 riuscirà 73440, che diviso per 24 darà 3060, che appunto tanti sono li suoi quadernarj.

Volendo finalmente trovare il numero de' quinarj, bisognerà moltiplicare il numero degli uomini in ciascuno de' quattro precedenti, e il prodotto dividerlo per 120; così nel numero di 90 si moltiplichi ciò per 89, indi per 88, poscia per 87, e finalmente per 86, che diverrà 5273912160, e questo diviso per 120, ne apporta 43949268 quinarj; se poi il numero fosse 100, si moltiplichi in 99, indi in 98, poscia in 97, e finalmente in 96, ed avremo 9034502400, il

che diviso per 120 riesce 75287520, essendo appunto tanti i quinarj di 100; e parimente, se il numero degli uomini fosse solamente 43, moltiplicato ciò per 42 che fa 1806, poscia per 41 che riuscirà 74046; indi per 40 che darà 2961840, e finalmente per 39 il cui prodotto sarà 115511760, che diviso per 120, ne dà i quinarj 962598, come appunto si ha nella tavola sopra addotta.

Chi però nel giuoco del lotto proponesse dovere insieme uscire per sorte 5 particolari Senatori da quei 100, o da quei 90 dove si tira il quinario, non potrà avere ciò indovinato se non una volta, in cui potessero riuscirne quelli stessi da lui proposti, potendone risalire 75287520 quinarj; e viceversa potrebbe mancargli 75287519 volte, in cui si facessero altri quinarj, supposto che i detti Senatori fossero 100, che se fossero 90 essendo li suoi quinarj 43949268, gli mancherebbero almeno gli altri 43949267.

Chi ne avesse proposti solamente 4 particolari, essendo 100 i Senatori, si potrebbe aggiungere nel quinario uno degli altri 96, e però in 96 maniere potrebbe guadagnarci, e nelle rimanenti 75287414 non potrebbe vincere; ed essendo essi proposti solamente 90, similmente potrebbe guadagnare in 86 volte, ma non potrebbe vincere nelle rimanenti 43949182.

Essendone poscia proposti 3 soli, se 100 sono i Senatori, potrà essere, che ne' quinarj se ne aggiungano a quei 3, altri 2 negli altri 97, i quali sarebbero 4656; onde in queste volte potrebbe

be guadagnarci, ma non nelle ſeguenti 75282864; ed eſſendo quelli 90, ſi aggiungerebbero gli altri 2 alli 87, onde in 3741 volte potrebbe guadagnare, ma gliene mancherebbero 43945527.

E ſe ne proponeſſe 2 ſoli, da gli altri 98, ſe ſono 100 li Senatori dovranno aggiungerſene tre ne i quinarj, perciò 152096 volte potrebbe guadagnarci, ma ci perderebbe nelle rimanenti 75135424; ed eſſendo eſſi propoſti ſolamente 90, ſe ne aggiungerebbero 3 dalli 88, onde guadagnar potrebbe in 109736, e gli mancherebbe il guadagno in 43839532 volte.

Se poi ne aveſſe nominato un ſolo de i 100, ſi aggiungerebbero 4 ne i quinarj dalli rimanenti 99, onde 3764376 volte potrebbe guadagnarci, e ne perderebbe nelle rimanenti volte 71523144, e ſe fuſſero i ſottopoſti ſolamente 90, degli altri 89 ſe ne aggiungerebbero i 4, che ſaranno 2441626 le volte, in cui potrebbe guadagnare, e ſolo gli mancherebbero 41507642.

Quindi è chiaro eſſere alquanto più facile il guadagnare proponendo uno, che due; ed ancora più facile con proporre due, che tre, e molto più facile il proporre tre ſoli, che quattro, ed alquanto meglio il proporre quattro, che cinque; eſſendo più difficile di tutti il propoſto di cinque, ed ancora il propoſto di quattro più difficile di ciaſcuno de' ſeguenti tre, due, ed uno; ed il propoſto di tre più difficile, che quello di due, ed uno; ſiccome quello di due è più difficile del propoſto di un ſolo; e ciaſcheduno nel numero maggiore de' Senatori ha più mancanza, che nel loro numero minore, come ſi è

dimostrato tra la moltitudine di 100, e tra quell' altra di 90.

Però se dovessero cavarsi cinque da sei uomini solamente, chi ne proponesse due soli, averebbe ugual numero di guadagno che di mancanza, essendo 3 il guadagno, e 6 manco 3, cioè pure 3 la mancanza; e proposto un solo, averebbe cinque volte il guadagno, ed una volta sola gli mancherebbe; se essi uomini fossero 7; propostone uno, si potrebbe 15 volte guadagnare, e solamente 6 volte perdere; e similmente più il guadagno, che la mancanza sarebbe nel numero 8, e nel 9, e finalmente nel 10 sarebbe uguale il guadagno con la mancanza, concorrendo l'uno, e l'altra nel 126, come si è dimostrato di sopra; ma poscia in maggior numero degli uomini da sottrarsi, sarà sempre maggiore la mancanza, che il guadagno in un solo, e molto più in un binario, e più nel ternario, più nel quadernario, ed assai più nel quinario; onde mi pare troppo rischio il concorrere a questa sorte di lotti, in cui nè meno può prendersi quei nomi che debbano per sorte essere estratti da quel fanciullo, da cui si fanno cavare.

CAPITOLO XVII.

De' Logaritmi Aritmetici.

SOgliono costituirsi i Logaritmi ad altri numeri geometricamente proporzionali, di cui il primo sia la radice, il secondo è il quadrato, il terzo è il cubo, il quarto dicesi biquadrato, il quin-

quinto è surdesolido, il sesto quadratocubo &c. essendo il primo moltiplicato in se stesso, fa il secondo, ed il secondo moltiplicato nel primo, fa il terzo, ed il terzo moltiplicato nel primo, fa il quarto, ed il quarto pure moltiplicato nel primo, fa il quinto, e così gli altri continuamente proporzionali; ma i Logaritmi, postone uno, di qualsivoglia numero, alla prima radice, il doppio di esso è Logaritmo al quadrato, ed il triplo del medesimo è Logaritmo al cubo, ed il quarto dello stesso è Logaritmo al biquadrato, ed il quinto di esso è Logaritmo al surdesolido &c.

Per esempio, essendo geometricamente Proporzionali questi numeri, che cominciano dal 2 sono pure Logaritmi questi sottoposti, che cominciano dal 3, o pure dal 7 &c.

Proporzionali -	2	4	8	16	32	64	128	&c.
Logaritmi ——	3	6	9	12	15	18	21	&c.
o pure ——	7	14	21	28	35	42	49	&c.
e così altri &c.								

E così ancora si osservi in essi Proporzionali, che uno essendo composto di due altri moltiplicati insieme, il Logaritmo di quello sarà composto dei Logaritmi degli altri due nella medesima serie. Per esempio, essendo il 128 composto da 32 moltiplicato in 4, il Logaritmo di 128, che è il 21, resta composto delli due 15 e 6 (attenenti al 32, ed al 4) che restano insieme 21; o pure, se il Logaritmo di 128 fosse il 49, sarà pure composto con 35, e 14 Logaritmi di 32, e di 4, e così gli altri; così il 4 moltiplicato

cato in 16 facendo 64, i Logaritmi di que' due, che sono 6, e 12, composti insieme, fanno il 18 Logaritmo di 64; o pure di 16 è 4, essendo Logaritmi 28, e 14 la somma pure di questi fa 42, che pure è Logaritmo di 64.

Volendo però mettere i Logaritmi alla serie di tutti i numeri, bisognerà prenderli nella seguente maniera, composti di più numeri, avendo posti solamente li zeri all' unità, che in se moltiplicandosi rimane la stessa. Io quì porterò solamente i Logaritmi dall' 1 alli 200, benchè altri li apportano fino a 1000, altri a 10000, e Giovanni Prestet alli 20000; ed indi poscia si mostrerà, perchè in alcuni miei Logaritmi siasi variato l' ultimo numero.

LOGARITMI DE' NUMERI.

Numeri.	Logaritmi.		Numeri.	Logaritmi.	
1	0	0000000	15	1	1760913
2	0	3010300	16	1	2041200
3	0	4771213	17	1	2304480
4	0	6020600	18	1	2552726
5	0	6989700	19	1	2787536
6	0	7781513	20	1	3010300
7	0	8450980	21	1	3222193
8	0	9030900	22	1	3424227
9	0	9542426	23	1	3617278
10	1	0000000	24	1	3802113
11	1	0413927	25	1	3979400
12	1	0791813	26	1	4149734
13	1	1139434	27	1	4313639
14	1	1461280	28	1	4471580

Numeri.		Logaritmi.	Numeri.		Logaritmi.
29	1	4623980	61	1	7853298
30	1	4771213	62	1	7923917
31	1	4913617	63	1	7993406
32	1	5051500	64	1	8061800
33	1	5185140	65	1	8129134
34	1	5314789	66	1	8195440
35	1	5440680	67	1	8260748
36	1	5563026	68	1	8325089
37	1	5682017	69	1	8388491
38	1	5797836	70	1	8450980
39	1	5910647	71	1	8512583
40	1	6020600	72	1	8573326
41	1	6127839	73	1	8633229
42	1	6232493	74	1	8692317
43	1	6334685	75	1	8750613
44	1	6434527	76	1	8808136
45	1	6532126	77	1	8864907
46	1	6627578	78	1	8920947
47	1	6720979	79	1	8976271
48	1	6812413	80	1	9030900
49	1	6901960	81	1	9084852
50	1	6989700	82	1	9138139
51	1	7075702	83	1	9190781
52	1	7160034	84	1	9242793
53	1	7242759	85	1	9294189
54	1	7323939	86	1	9344985
55	1	7403627	87	1	9395193
56	1	7481880	88	1	9444827
57	1	7558749	89	1	9493900
58	1	7634280	90	1	9542426
59	1	7708520	91	1	9590414
60	1	7781513	92	1	9637878

Numeri.		Logaritmi.	Numeri.		Logaritmi.
93	1	9684830	125	2	0969100
94	1	9731279	126	2	1003706
95	1	9777236	127	2	1038037
96	1	9822713	128	2	1072100
97	1	9867717	129	2	1105898
98	1	9912260	130	2	1139434
99	1	9956353	131	2	1172713
100	2	0000000	132	2	1205740
101	2	0043214	133	2	1238516
102	2	0086002	134	2	1271048
103	2	0128372	135	2	1303339
104	2	0170334	136	2	1335389
105	2	0211893	137	2	1367206
106	2	0253059	138	2	1398791
107	2	0293838	139	2	1430148
108	2	0334239	140	2	1461280
109	2	0374265	141	2	1492192
110	2	0413927	142	2	1522883
111	2	0453230	143	2	1553360
112	2	0492180	144	2	1583626
113	2	0530784	145	2	1613680
114	2	0569049	146	2	1643529
115	2	0606978	147	2	1673173
116	2	0644580	148	2	1702617
117	2	0681860	149	2	1731863
118	2	0718820	150	2	1760913
119	2	0755469	151	2	1789769
120	2	0791813	152	2	1818436
121	2	0827854	153	2	1846915
122	2	0863598	154	2	1875207
123	2	0899052	155	2	1903317
124	2	0934217	156	2	1931347

Numeri.		Logaritmi.	Numeri.		Logaritmi.
157	2	1958997	179	2	2528530
158	2	1986371	180	2	2552726
159	2	2013972	181	2	2576786
160	2	2041200	182	2	2600714
161	2	2068258	183	2	2624511
162	2	2095152	184	2	2648178
163	2	2121876	185	2	2671717
164	2	2148439	186	2	2695130
165	2	2174840	187	2	2718416
166	2	2201081	188	2	2741579
167	2	2227165	189	2	2764619
168	2	2253093	190	2	2787536
169	2	2278868	191	2	2810334
170	2	2304489	192	2	2833013
171	2	2329962	193	2	2855573
172	2	2355285	194	2	2878017
173	2	2380461	195	2	2900347
174	2	2405493	196	2	2922560
175	2	2430380	197	2	2944662
176	2	2455127	198	2	2966653
177	2	2479733	199	2	2988531
178	2	2504200	200	2	3010300
					&c.

Che questi Logaritmi siano bene proposti, può dimostrarsi, avvertendo come qualunque numero paragonandosi al suo quadrato, il Logaritmo di questo ne riesca il doppio di quello; e paragonandosi esso numero al suo cubo, il Logaritmo di questo sia il triplo di quello, e così negli altri suoi proporzionali riesca il Logaritmo tante volte moltiplice di quello della radice quanto in esso cre-

sca

ſca la proporzione. Per eſempio poſto il Logaritmo di 3, rieſce il doppio del medeſimo, per Logaritmo del di lui quadrato 9, e ne rieſce triplo il Logaritmo del ſuo cubo 27, e quadruplo il Logaritmo del biquadrato 81; e quintuplo il Logaritmo del ſurdeſolido 243 &c. Sicchè eſſendo Logaritmo di 3 il 0 4771213, ne rieſce del quadrato 9 queſt' altro Logaritmo 0 9542426, duplo di eſſo (benchè altri Matematici levano l' ultima unità dal Logaritmo di 9, ponendovi 0 9542425) e del quadrato di 2, che è 4, il Logaritmo è 0 6020600, duplo ſimilmente del Logaritmo di 2, che era 0 3010300; e del quadrato di 7, che è 49, il Logaritmo ſarà 1 6901960, che è il doppio di 0 8450980, Logaritmo di 7 (però altri Matematici aggiungono una unità di ſopra al Logaritmo di 49, mettendolo 1 6901961) Parimente del quadrato di 6, che è 36, il Logaritmo è 1 5563026, duplo appunto di 0 7781513, Logaritmo di 6 (benchè altri Matematici pongono a 36 il Logaritmo minore di una unità, cioè 1 5563025). Così pure il quadrato di 14 eſſendo 196, il ſuo Logaritmo è 2 2922560, che parimente è duplo di 1 1461280 Logaritmo di 14. E così in tutti gli altri.

Circa il cubo di 2 è 8, ed è il Logaritmo di 8 triplo di quello di 2, eſſendo quello 0 9030900; e queſto 0 3010300, la terza parte di eſſo; ſimilmente 1 4313639, Logaritmo di 27 cubo di 3, è quello pure triplo di 0 4771213, Logaritmo di 3 (al medeſimo però Logaritmo di 27, levano l' ultima unità alcuni Matema-

tici

tici, mettendogli 1 4313638). Il cubo di 5 è pure 125, il cui Logaritmo 2 0969100, è parimente triplo del Logaritmo di 5, che era 0 6989700; e così sono tutti gli altri.

Oltre di ciò, qualunque numero compongasi con un altro moltiplicato in esso, il Logaritmo di tale numero prodottto da due altri, è composto da ambidue i Logaritmi di que' numeri due. Per esempio il numero 84, essendo composto da 2 moltiplicati in 42, ed ancora da 3 moltiplicato in 28, e da 4 moltiplicato in 21, e da 6 moltiplicato in 14, e da 7 moltiplicato in 12, sarà il Logaritmo di 84 composto sì da quelli di 2, e di 42, sì dagli altri di 3, e 28, e da 4, e da 21, e da 6, e da 14, e da 7, e da 12, come vedremo in questa maniera.

2	0 3010300
42	1 6232493
84	1 9242793

3	0 4771213
28	1 4471580
84	1 9242793

4	0 6020600
21	1 3222193
84	1 9242793

6	0 7781513
14	1 1461280
84	1 9242793

7	0 8450980
12	1 0791813
84	1 9242793

Parimente il 36 (oltre l'essere composto da 6 in 6 quadrato di esso) è pure moltiplicato da 2 in 18, da 3 in 12, e da 4 in 9, onde ne seguono li composti de' loro Logaritmi, che fanno uguale il Logaritmo di 36 in questa maniera.

2	0 3020300
18	1 2552726
36	1 5563026

3	0 4771213
12	1 0791813
36	1 5563026

4	0 6020600
9	0 9542426
36	1 5563026

E così potrà ritrovarsi negli altri numeri; onde ancora moltiplicando il 93 in 95, donde ne proverrà il numero assai maggiore 8835, si troverà il Logaritmo di questo composto dalli due Logaritmi di quelli altri, cioè da 1 9684830, che è di 93, ed 1 9777236, che è di 95, ne segue 3 9462066, per Logaritmo di 8835; e similmente si potranno ritrovare i Logaritmi di qualunque numero, proponendoli secondo i modi già dimostrati.

Ne' libri di Gasparo Scotto, e di Francesco Saverio Brunetti al Logaritmo di 80 pongono 1 9030899, ma da Claudio Francesco de Sciales, e da Giovanni Prestet ci si mette, come ancora io ci ho posto 1 9030900, essendo 80 moltiplicato da 8 in 10, e però i loro Logaritmi 0 9030900 dell' 8, ed 1 0000000 del 10 appunto fanno composti il nostro Logaritmo di 80. Tutti però levano similmente una unità dalli Logaritmi di 9, di 12 di 18 di 24 di 26, di 27, di 33 di 36, di 39, di 45, di 48, di 52, di 54, di 63, di 66, di 72, di 78, di 81, di 90, di 93, di 96, di 104, di 108, di 117, di 120, di 123, di 126, di 129, di 132, di 135, di 141, di 143, di 144, di 153 di 156, di 159, di 162, di 164, di 165, di 171, di 172, di 174, di 180, di 186 di 188, di 189, di 192, di 195, di 198 (anzi in quello di 81, ed in quello di 162 levano le due ultime unità, per esserne levato uno al 9, di cui l' 81 è quadrato, ed il 162 è duplo di esso) però ne pongono una sola unità di più ne' Logaritmi di 49, di 98, di 119, di 161, di 186; ma siccome si è mostrato,

essere

essere essi Logaritmi da me posti, ottimamente corrispondenti a i Logaritmi degli altri numeri, che moltiplicandosi insieme fanno quel maggior numero, che ha quel Logaritmo, di cui si cerca; può altresì in altri numeri cercarne i loro Logaritmi, riguardando da quali altri Logaritmi de' numeri componenti esso numero, possa il Logaritmo determinarsi al medesimo numero.

APPENDICE.

Molte altre aritmetiche osservazioni si potrebbero quì aggiungere, ma dipendendo dalle dimostrazioni geometriche, ed algebratiche da esporsi in altri luoghi, non occorre in questo luogo parlarne. Solamente aggiungerò quì altre proprietà appartenenti a' cubi, a' quadrati, ed alle loro radici.

A		*B*		*C*
1	———	1	———	1
2	———	3	———	4
3	———	6	———	9
4	———	10	———	16
5	———	15	———	25
6	———	21	———	36
7	———	28	———	49
8	———	36	———	64
9	———	45	———	81
10	———	55	———	100
11	———	66	———	121
12	———	78	———	144
&c.		&c.		&c.

Primieramente si osservi, che posta la serie *A* de' numeri dall' unità crescenti, cioè 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.; e posta l' altra serie *B*, che è la somma di tutti gli antecedenti, cioè 1 uguale ad 1, poscia 1, e 2 uguale a 3, indi 1, 2, e 3 uguale a 6, ed aggiunto a questo il 4 fa il 10, al quale unito il 5 fa il 15, e messovi il 6 fa 21, &c. Poscia nell' altra serie *C*, si fa la somma di due numeri dell' antecedente serie *B*, e ne riescono i quadrati de' numeri della serie *A*, rimanendo primieramente 1, indi 1 e 3 uguale a 4 quadrato di 2, poscia 3 e 6 uguale a 9 quadrato di 3, di poi 6 e 10 uguale a 16 quadrato di 4, ne segue 10, e 15 uguale a 25 quadrato di 5. e finalmente 15 e 21 uguale a 36 quadrato di 6, e così tutti gli altri quadrati 49, 64, 81, &c. composti della sua radice, e di tutti gli altri numeri precedenti.

Se-

A	*B*	*D*	*E*
1	1	1	1
2	3	9	8
3	6	36	27
4	10	100	64
5	15	225	125
6	21	441	216
7	28	784	343
8	36	1296	512
9	45	2025	729
10	55	3025	1000
11	66	4356	1331
12	78	6084	1728
&c.	&c.	&c.	&c.

Secondariamente alle due ſerie *A*, e *B*, aggiunta una ſerie *D*, in cui ſono i quadrati di quelle ſomme *B* delle radici, cioè l' 1 di 1 il 9 di 3, il 36 di 6, il 100 di 10, il 225 di 15 &c. Ma nell' altra ſerie *E*, ſono i cubi 1, 8, 27, 64 &c. corriſpondenti alle radici 1, 2, 3, 4 &c. della ſerie *A*, i quali cubi ſono cavati dalla ſerie *D*, levando ogni quadrato dal ſuo precedente, eſſendo 9 manco 1 uguale ad 8, e il 36 manco 9 uguale al 27, ed il 100 manco 36 uguale al 64, ed il 225 manco il 100 uguale a 125 &c.

Anzi può in terzo luogo oſſervarſi, che i medeſimi quadrati delle ſomme delle radici, quali ſono nella ſerie *D*, ſono eſſi pure la ſomma de' cubi di quelle radici, che compongono la loro radice quadra; cioè il 9 quadrato di 3, è uguale ad 1 ed 8, che ſono i cubi di 1 e di 2; ed il

quadrato 36 la cui radice e 6, è uguale ad 1, 8, e 27, che ſono i cubi di 1, di 2, e di 3; ſimilmente il quadrato 100 la cui radice è 10, è uguale ad 1, 8, 27, è 64 che ſono i cubi di 1, 2, 3, e 4; ed ancora il ſeguente quadrato 225 la cui radice 15, rimane compoſto de' cubi 1, 8, 27, 64, e 125, le cui radici ſono 1, 2, 3, 4, e 5, che fanno la ſomma di 15; e così ancora rieſce in ciaſcun altro.

F.	*G.*	*H.*	*I.*
2	2	4	8
4	6	36	72
6	12	144	288
8	20	400	800
10	30	900	1800
12	42	1764	3528
&c.	&c.	&c.	&c.

La quarta oſſervazione può eſſere nelle ſerie *F*, *G*, *H*, *I*. Nella prima ſono i numeri creſcenti di 2, cioè 2, 4, 6, 8 &c; nella ſeconda *G*. vi è la ſomma di eſſi 2, 6, 12, 20 &c; e nella terza *H*. vi ſono i quadrati di tali ſomme 4, 36, 144, 400 &c; e nell' ultima ſerie *I*. vi è il doppio di ciaſcuno di quei precedenti quadrati, cioè 8, 72, 288, 800 &c. quali biſogna oſſervare, che ciaſcheduno è la ſomma de' cubi di quei numeri della ſerie *F*, cioè 8 è il cubo di 2, ed il 72 è uguale ad 8 e 64, che ſono i cubi di 2 e di 4; ſimilmente il 288 è uguale a numeri 8, 64, e 216, che ſono i cubi di 2, di 4, e di 6; parimente l' 800 uguaglia 8, 64, 216, 512, che ſono i cubi di 2, di 4, e di 6, e di 8, e così gli altri.